This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

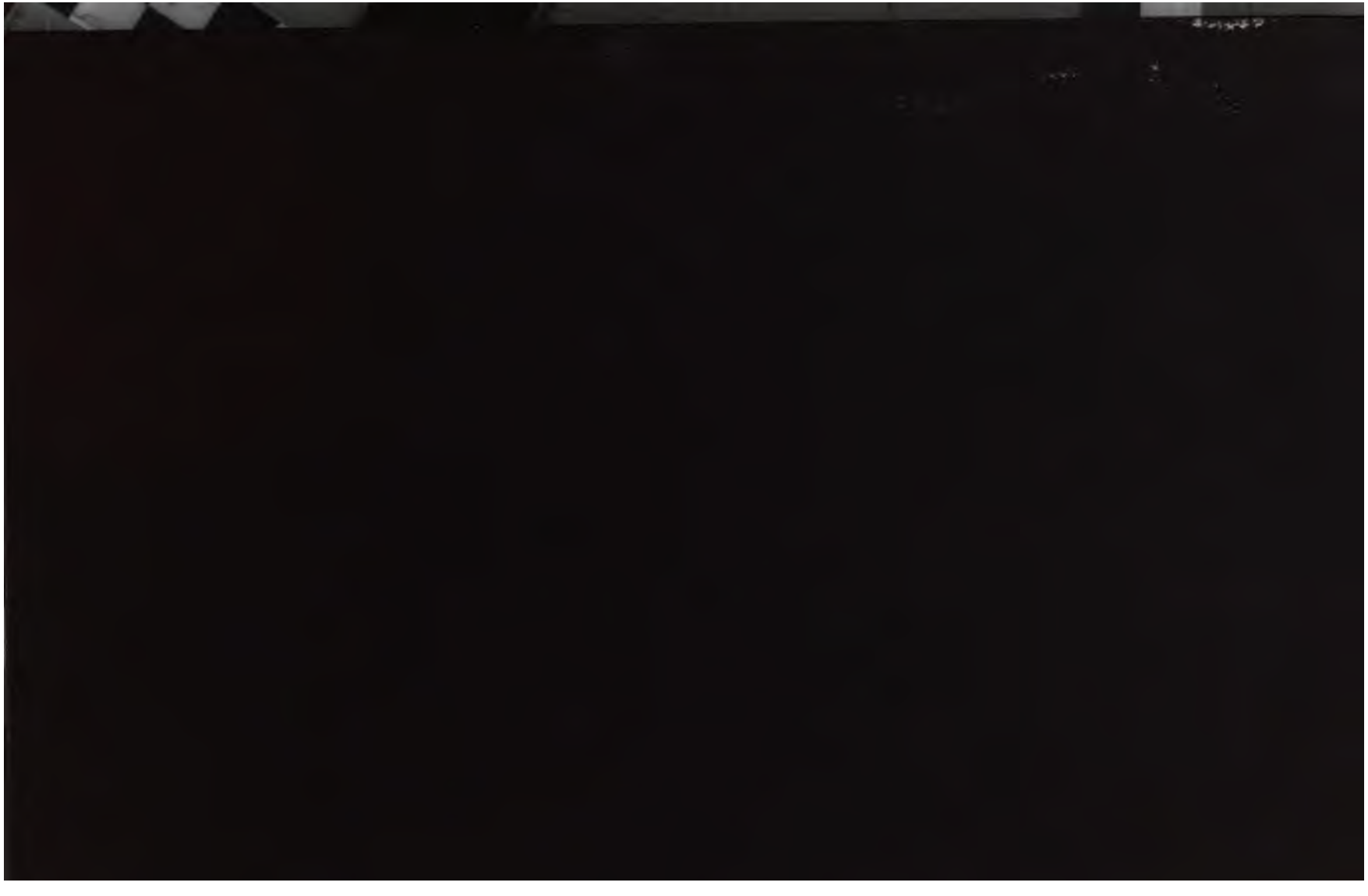
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR.

VIERZEHNTES HEFT.

MIT 113 FIGUREN IM TEXT.

INHALT:

AXEL ANTHON BJÖRNBO: STUDIEN ÜBER MENELAOS' SPHÄRIK. BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DER SPHÄRIK UND TRIGONOMETRIE DER GRIECHEN.

HEINRICH SUTER: NACHTRÄGE UND BERICHTIGUNGEN ZU „DIE MATHEMATIKER UND ASTRONOMEN DER ARABER UND IHRE WERKE".

KARL BOPP: ANTOINE ARNAULD, DER GROSSE ARNAULD, ALS MATHEMATIKER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

STUDIEN ÜBER MENELAOS' SPHÄRIK.

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DER SPHÄRIK UND TRIGONOMETRIE DER GRIECHEN

VON

AXEL ANTHON BJÖRNBO.

MIT 75 FIGUREN IM TEXT.

118820

Vorwort.

Indem ich der Öffentlichkeit die vorliegende Abhandlung übergebe, habe ich die Verpflichtung, denen meinen Dank auszusprechen, die mir bei der Ausarbeitung derselben in der einen oder der anderen Weise behülflich gewesen sind. Aufser meinen Lehrern Herrn Prof. H. G. Zeuthen, der mir ursprünglich die Anregung zu dieser Untersuchung gab, und Herrn Prof. J. L. Heiberg, der mir aus seinen Kollationen Material entlieh, und die mir beide immer mit Rat und That beistanden, gebührt mein Dank in erster Reihe Herrn Dr. R. Besthorn, ohne dessen unschätzbare Auskünfte über die arabischen Menelaoshandschriften die Vollführung der wichtigsten Teile der Abhandlung nicht möglich gewesen wäre.

Dem K. Bayerischen Kultusministerium, sowie der Direktion der K. Hof- und Staatsbibliothek zu München, die mich mit der gröfsten Zuvorkommenheit in den Stand setzten, fünf der lateinischen Menelaoshandschriften aus Paris, Wien und Venedig gleichzeitig benutzen zu können, bringe ich meinen Dank dar; dem Vorstand der Handschriftenabteilung der K. Hof- und Staatsbibliothek zu München, Herrn Dr. F. Boll danke ich für alle von seiner Seite erwiesene Hülfe und Liberalität bei der Benutzung dieser Handschriften.

Meinem Freunde Herrn cand. mag. Raphael Meyer, der mir nicht nur durch eine vorläufige Untersuchung der Vatikanischen Menelaoshandschriften, sondern auch bei der Korrektur der ganzen Abhandlung beistand, sowie Herrn cand. phys. Ernst Wagner, der einen Teil meines Manuskriptes der mathematischen Terminologie wegen durchlas und kritisierte, danke ich freundlichst für ihre bereitwillige Hülfe.

Gröfsere Teile der Abhandlung sind in dem von Herrn Prof. A. v. Braunmühl geleiteten math.-histor. Seminar der K. Technischen Hochschule zu München vorgetragen worden, und die durch den Vortrag erregte Diskussion und gegen denselben ausgeübte Kritik sind meiner Arbeit sehr zuträglich gewesen, was jedermann, der sich mit den Braunmühlschen Arbeiten bekannt gemacht hat, leicht verstehen wird.

Die Abhandlung (jedoch ohne Nachtrag) wurde im Juni 1901 an die philosophische Fakultät, 2. Sektion der K. Ludwig-Maximilian-Universität zu München als Promotionsschrift eingereicht und von der Fakultät angenommen; als Inauguraldissertation dienten Teile des 1., 2. und 6. Kapitels.

Der Nachtrag, welcher erst nach der Drucklegung hinzugefügt ist, ist das Ergebnis von Untersuchungen in den Bibliotheken Roms. Die Form und der Umfang dieses Nachtrags, bei dessen Entstehung Zufälligkeiten eine Hauptrolle spielen mufsten, können mit vollem Recht kritisiert werden. Ich hoffe jedoch, dafs der Leser billigen wird, dafs ich den Inhalt dieses Nachtrags nicht in mehrere Spezialaufsätze und Notizen zerstückelt habe.

Was die Trigonometrie der Ebene betrifft, auf die ich in meiner Darstellung nur soviel Rücksicht genommen habe, als es mir durch den Inhalt von Menelaos' *Sphärik* geboten wurde, verweise ich den Leser, aufser auf die in der Abhandlung genannten Arbeiten, auf die Abhandlungen des Herrn Prof. Fr. Hultsch, und namentlich auf einen trefflichen Spezialaufsatz im *Weltall*, 2. Jahrg. Seite 49—55. Der Verfasser kommt hier Seite 53—54 zu Resultaten, die, was die Trigonometrie der Ebene betrifft, mit den meinigen in Bezug auf die sphärische vollständig parallel laufen.

Ob die Sinusfunktion, wie Hultsch Seite 55 annimmt, schon von den Griechen des 3. und 4. Jahrh. n. Chr., oder, wie ich annehme (vgl. Seite 86—88), erst von den Indern eingeführt wurde, sagt meiner Ansicht nach weniger, da wir doch durch unsere von einander ganz unabhängigen Untersuchungen beide zu dem Schlufsergebnis gekommen sind, dafs die Kreissehne die einzige trigonometrische Funktion der älteren Zeit war, dafs die Ersetzung derselben durch den Sinus erst in der Weiterentwickelung der Trigonometrie mehr als eine lediglich formale Verbesserung wurde, und endlich, dafs diese Weiterentwickelung *nicht* den Griechen zuzuschreiben ist.

Dafs die Einführung der Sehnenfunktion sich historisch durch die Einrichtung und Anwendung der Hipparchschen Dioptra erklären läfst, möchte ich gegen Hultschs Annahme bezweifeln (vgl. Hultsch, l. c. Seite 55); dafs Hipparchs Ausrechnungen sich nicht auf die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks und dessen Scheitelwinkel, sondern auf die Kathete und den gegenüberliegenden Winkel eines rechtwinkligen richteten, ist nämlich selbstverständlich und braucht keineswegs ein Resultat der durch die Diopternessung gegebenen Dimensionen (Dreieckselemente) zu sein; denn jedenfalls mufs das gleichschenklige Dreieck, um aufgelöst zu werden, in zwei rechtwinklige geteilt werden, ganz unabhängig davon, welche die gegebenen Dimensionen sind. Die Gründe dazu, dafs die Kreissehne die erste trigonometrische Funktion wurde, stecken auch viel tiefer, als dafs sie lediglich in den zufällig gegebenen Dimensionen bei einer bestimmten Art

von Messungen bestehen sollten. Wir müssen uns vor Augen halten, dafs das Skelett der trignometrischen Tafeln in der Form einzelner bekannten Kreissehnen schon gegeben war, dafs eine systematische Behandlung der Auflösung von Dreiecken, d. h. eine trigonometrische, immerhin (wie es auch heutzutage in unseren elementar-trigonometrischen Darstellungen geschieht) auf die Kreissehnenberechnung zurückzuführen war, und schliefslich, dafs die sphärischen Probleme, die eine trigonometrische Behandlung erforderten, die Aufmerksamkeit ganz direkt auf den Durchmesser lenkten, wie es in meiner Abhandlung Seite 116—118 und 129 dargelegt wird.

Auf den kürzlich erschienenen 3. Teil, *Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci,* von Herrn Prof. G. Lorias Werk: *Le scienze esatte nell' antica Grecia* habe ich leider keine Rücksicht nehmen können. In diesem Werk, in dem endlich der Versuch gemacht worden ist, zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften der Griechen eine Brücke zu schlagen, wird auch (Seite 55—62) Menelaos eingehend behandelt, und mehrere der Resultate, zu welchen meine Spezialuntersuchungen mich führten, werden hier in grofsen Zügen dargelegt. Nur die Darstellung des Inhalts der Trigonometrie in Menelaos' 3. Buch leidet an Mängeln, woran doch lediglich die schlechten Menelaosausgaben die Schuld haben. Die vorsichtige Weise, auf welche die Erfindung der Trigonometrie und überhaupt die Vorgänge vor Ptolemaios von Herrn Loria (Seite 64—67) behandelt werden, würde mich, selbst wenn die recht kläglich ausgefallene Ehrenrettung des Ptolemaios durch Herrn Prof. W. Förster (*Weltall* 2, Seite 16—18) nicht erschienen wäre, davon überzeugt haben, dafs mein Versuch, Delambres, Tannerys, v. Braunmühls und Hultschs Resultate mit Hilfe von Menelaos' *Sphärik* noch fester zu stellen, vielleicht doch nicht ganz wertlos ist.

Rom, Mai 1902.

Axel Anthon Björnbo.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erstes Kapitel. Die Berichte über Menelaos 4

Zweites Kapitel. Die Überlieferung der Sphärik 10

Drittes Kapitel. Die Druckausgaben der Sphärik 17

Viertes Kapitel. Menelaos' erstes Buch und Euklids Elemente.

a. Menelaos' Definitionen 26

b. Übersicht des ersten Buches 27

c. Übertragung der Dreieckssätze aus der Ebene auf die Kugel . . . 32

Fünftes Kapitel. Menelaos' zweites Buch.

a. Übersicht des zweiten Buches 51

b. Die voreuklidische Sphärik 56

c. Wann lebte Theodosios? 64

d. Zusammenhang zwischen Sphärik und Astronomie 65

Sechstes Kapitel. Menelaos' drittes Buch und die sphärische Trigonometrie.

a. Überblick über unsere Kenntnisse der griechischen Trigonometrie . 81

b. Der Inhalt von Menelaos' drittem Buch 88

c. Die Erfindung der Trigonometrie 124

Tafel über den Inhalt der alten Sphärik 136

Nachtrag 137

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 19, Note 66, Zeile 6: *mutuatur Mihi* lies: *mutuatur. Mihi*

„ 45, Zeile 24: $\smile AB$ lies: AB

„ 102, „ 25: Basissegmente lies: Basensegmente.

Einleitung.

Während die Entwickelungsgeschichte der eigentlichen Geometrie der Griechen in den letzten Jahrzehnten von Forschern wie Paul Tannery, Cantor, Hultsch, Heiberg, Zeuthen u. a. immer mehr klar gelegt worden ist, und die Reihe der in neuen textkritischen Ausgaben vorliegenden griechischen Geometer immer wächst, giebt es ein anderes Gebiet, das noch ziemlich vernachlässigt ist. Es ist dies die Litteratur, die entweder als *„Einführung in die Astronomie"* zu bezeichnen ist, oder die ihre Entstehung hauptsächlich der Anwendung in der Astronomie zu verdanken hat. Nicht nur ist erst die Geschichte des Inhalts dieser Werke herzustellen, sondern aufserdem liegen dieselben in so schlechten Ausgaben vor, dafs eine ziemlich grofse Herausgeberthätigkeit vorausgehen mufs, bevor diese Geschichte sich erschöpfend behandeln läfst.

Diese Werke gehören fast alle der Sammlung an, die den Namen *μικρὸς ἀστρονομούμενος* — die mittleren Bücher — führt, weil dieselben ihrerzeit als Einleitung zum Studium des Ptolemaios verwendet wurden, nachdem der Schüler erst die Euklidischen Elemente inne hatte.

Von den Werken dieser Sammlung, die wir hier gebrauchen werden, liegt nur Autolykos[1]) in einer genügenden Ausgabe vor, dagegen Euklids *Phainomena*[2]) und Theodosios' drei Werke[3]) in schlechten Ausgaben, oder sogar nur in Übersetzungen.

Mit den Werken der eigentlichen Astronomie verhält es sich schon besser. Hipparchs *Kommentar zum Aratos,*[4]) Geminos' *Eisagoge*[5]) und die

1) Autolyci *de sphaera quae movetur et de ortibus et occasibus,* ed. F. Hultsch, Leipzig 1885.

2) Euclidis *phaenomena,* ed. D. Gregory, London 1703; deutsch von A. Nokk, Freiburg 1850.

3) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze, Berlin 1852; deutsch von Nizze, Stralsund 1826.

4) Hipparchi *in Arati Phaenomena Commentaria,* ed. C. Manitius, Leipzig 1894 (mit deutscher Übersetzung).

5) Gemini *elementa astronomiae,* ed. C. Manitius, Leipzig 1898 (mit deutscher Übersetzung).

Astronomie von Theon von Smyrna[6]) sind schon neu herausgegeben; die Hälfte von Ptolemaios' *Syntaxis*[7]) (*Almagest*) auch; dagegen bilden die Kommentare zu letzterer von Theon von Alexandria,[8]) für die wir in dieser Abhandlung vielfach Verwendung haben, in dieser Beziehung eine Ausnahme.

Der Verfasser, mit dem wir uns namentlich beschäftigen werden, Menelaos von Alexandria, gehört auch zu den von den Geschichtsschreibern der Mathematik ziemlich vernachlässigten. Sein Hauptwerk, die *Sphärik*, das auch zu den mittleren Büchern gerechnet wird, liegt nur in schlechten und aufserdem sehr seltenen Ausgaben vor. Wenn dieses Werk, trotz des interessanten Inhalts und der offenbaren Originalität des Verfassers, nur wenig beachtet worden ist, so kommt es hauptsächlich daher, dafs der griechische Text verloren gegangen und das Werk somit nur durch arabische Übersetzungen erhalten ist.

Über die unzweifelhafte Bedeutung dieses Werkes ist erst kürzlich Licht geworfen, und zwar von A. v. Braunmühl, der in seiner *Geschichte der Trigonometrie* dem Menelaos das ihm gebührende Lob gespendet, während er schon in zwei vorher erschienenen Abhandlungen[9]) mit Fug und Recht geschieden hat zwischen dem, was in der That dem Menelaos, dem Nassir-eddîn-Tûsi und dem Regiomontanus von den Erfindungen auf den Gebieten der Sphärik und der sphärischen Trigonometrie zuzuschreiben ist. Leider ist er doch mitunter durch den Gebrauch einer sehr schlechten Menelaosausgabe irre geführt worden.

Eine Geschichte der Sphärik ist bisher nicht hergestellt.[10]) Nur gelegentlich ist sie in der Geschichte der Astronomie, die sehr eng mit der der Sphärik zusammenhängt, behandelt worden. In Betracht kommen hier aufser Beiträgen von Nokk, Hultsch und Heiberg[11]) namentlich zwei gröfsere Werke, und zwar die von Delambre und Tannery.[12])

6) Theonis Smyrnaei *opera*, ed. Hiller, Leipzig 1878; Théon de Smyrne, par J. Dupuis, Paris 1892 (mit französischer Übersetzung).

7) Ptolemée, *l'Almageste*, par Halma I—II, Paris 1813 (mit französischer Übersetzung); Ptolemaei *Syntaxis mathematica*, ed. J. L. Heiberg, Pars I, Leipzig 1894.

8) Theonis Alexandrini *commentariorum libri XI*, Basel 1538; die Ausgabe von Halma (Paris 1822) stand mir nicht zur Verfügung.

9) A. v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900; vgl. idem, *Nassir Eddin Tûsi und Regiomontan*, Abh. der k. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher 71, 1897.

10) Vgl. P. Tannery, *La géométrie grecque*, p. 12.

11) Vgl. unten Kap. 4, b.

12) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* 1—2, Paris 1817; P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris 1893. — M. Cantor,

Delambre giebt eine gute, sehr umfangreiche Darstellung der alten astronomischen Methoden mit den modernen verglichen. Seine Darstellung ist aber nicht immer deutlich, überhaupt nicht leicht zugänglich, und, was die geschichtlichen Erläuterungen betrifft, schon veraltet. Aufserdem steht er zu sehr auf dem Standpunkte des modernen Mathematikers, um die Alten richtig zu beurteilen; es fehlt ihm an geschichtlichem Sinn, z. B. eben dem Menelaos gegenüber.

Tannerys Werk ist ebenso klar und deutlich wie geistreich und interessant; doch scheint Tannery die *Sphärik* des Menelaos einer genaueren Prüfung nicht unterworfen zu haben.

Mitteilungen über die Überlieferung der *Sphärik* des Menelaos finden wir bei mehreren Verfassern, die die Thätigkeit der Araber behandelt haben.[13]) Die genaueste Zusammenstellung giebt uns M. Steinschneider.[14]) Die neuesten Aufschlüsse finden wir bei H. Suter.[15]) Bei den hebräischen Übersetzungen müssen wir uns wieder auf die Autorität Steinschneiders stützen.[16])

Ein Vergleich der mittelalterlichen lateinischen Übersetzung und der lateinischen Druckausgaben ist bis jetzt noch nicht unternommen; eine Untersuchung der arabischen und hebräischen Handschriften allerdings auch nicht; denn, was Steinschneider u. a. geben, ist lediglich eine Übersicht über die arabischen Berichte und das vorliegende Handschriftenmaterial. In einer Abhandlung über die mittleren Bücher in den Händen der Araber erwähnt Steinschneider[17]) doch eine Pariserhandschrift, die eine mittelalterliche lateinische Übersetzung der Sphärik enthält, und giebt uns als Anregung zu näherer Untersuchung verschiedene Aufschlüsse über den Inhalt.

Unser Zweck wird es sein, nachdem wir die Berichte über Menelaos gesammelt haben, zuerst zu versuchen, den Inhalt der Sphärik festzustellen, danach diesen Inhalt näher zu untersuchen, um das Werk des Menelaos

---

Geschichte der Mathematik, und R. Wolf, *Geschichte der Astronomie,* behandeln beide einen so grofsen Stoff, dafs sie auf Detailuntersuchungen verzichten müssen.

13) Z. B. Leclerc, *Histoire de la médécine arabe* I—II, Paris 1876; Hammer, *Litteraturgeschichte der Araber.*

14) M. Steinschneider, *Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen,* 2. Abschnitt Mathematik, § 111—112, Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellschaft **50**, p. 196 ff.

15) H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke,* Abh. z. Gesch. der math. Wissenschaften, Leipzig 1900.

16) M. Steinschneider, *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters* 1—2, Berlin 1893, 2, § 319, p. 515 ff.

17) Idem, *Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter,* Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 456 ff.

in seinen Verhältnissen zu den Vorgängern und den Nachfolgern, sowie die Stellung, die es überhaupt in der Geschichte der Mathematik und der Astronomie einnimmt, zu beurteilen.

Erstes Kapitel.

Die Berichte über Menelaos.

1. **Plutarch** (Zeitgenosse des Trajan) *„de facie in orbe lunae"* cap. 17 (Plutarchi *moralia*, ed. Bernardakis V, p. 429).

Hier läfst der Verfasser eine der Personen der in Dialogform gehaltenen Abhandlung sich mit folgenden Worten an einen anwesenden Menelaos, in dem er den Mathematiker erkennt, wenden: *„Ich schäme mich fast, lieber Menelaos, in deiner Gegenwart eine mathematische Thesis, die als Basis für die katoptrischen Untersuchungen gilt, hervorzuheben . . ."*.

2. **Ptolemaios** (thätig ca. 125—151 n. Chr.), *Syntaxis* VII, cap. 3 (ed. Halma II, p. 25 u. 27).

Hier werden zwei Observationen mitgeteilt, die „der Geometer Menelaos" im ersten Regierungsjahr des Trajan in Rom gemacht hat.[17a])

3. **Pappos** (3. Jahrh. n. Chr.) *συναγωγή* (*collectiones*):

a) IV, 36 (ed. Hultsch, p. 270): *„Von den Kurven, die Demetrios von Alexandria und Philon von Tyana untersuchten, und die manche merkwürdige Eigenschaften haben, ist eine von Menelaos besonders hervorgehoben und zwar die, die er 'παράδοξος' nannte."*[18])

b) VI, 1 (ed. Hultsch, p. 476): Eine Figur, die von drei gröfsten Kreisbogen umschlossen ist, nennt Menelaos in der *Sphärik* „τρίπλευρον".[19]) — An derselben Stelle beweist Pappos vier Sätze über sphärische Dreiecke, die wir in Menelaos' *Sphärik* wiederfinden.

c) VI, 55 (ed. Hultsch, p. 602): Über die Untergänge der Tierkreiszeichen hat „Menelaos der Alexandriner" eine Abhandlung (*πραγματεία*) geschrieben.[20]) — Diese Stelle gehört zum Kommentar zu Euklids *φαινόμενα*, wo ähnliche Probleme behandelt sind.

17a) Dieser Bericht wird in der späteren astronomischen Litteratur immer wieder reproduziert, zuerst in Proklos' *ὑποτύπωσις*.

18) Vgl. Chasles, *Aperçue historique*, p. 23.

19) Vgl. unten Kap. 4, a.

20) Die Übersetzung von Hultsch „*πραγματεία* = commentarium" ist nicht als Kommentar im modernen Sinn dieses Wortes zu verstehen.

4. **Theon von Alexandria** (ca. 365 n. Chr.) in den *Kommentaren zu Ptolemaios' Syntaxis*:

a) zu I, cap. 10 (ed. Halma, p. 110) sagt Theon bei der Erwähnung der Sehnentafel des Ptolemaios: *„Von Hipparch wurde nun auch eine Abhandlung in 12 Büchern über die Geraden im Kreise verfafst, ferner auch von Menelaos eine in 6 Büchern."* [21])

b) zu II, cap. 7 (ed. Halma, p. 266). Zur Bestätigung der Kongruenz zweier sphärischer Dreiecke fügt Theon hinzu: *„so wie es Menelaos in der Sphärik beweist"*. [22])

c) zu VI, cap. 11 (Baselerausgabe, p. 342—43) sagt Theon: *„Die von Ptolemaios hier vorgeführte Theorie läfst sich besser erörtern, wenn erst zwei Theoreme der Sphärik bewiesen werden."* Danach referiert Theon zwei Kongruenzsätze sphärischer Dreiecke mit Beweis. Er schliefst mit den Worten: *„Dies bewies also Menelaos im ersten Buche der Sphärik."* [23])

5. **Proklos** (ca. 410—485 n. Chr.) im *Kommentar zum ersten Buche der Euklidischen Elemente* (ed. Friedlein, p. 345) bemerkt zu Euklid I, 25: *„Die Beweise dieses Satzes, die die anderen besorgt haben, wollen wir kurz berichten, und zwar zuerst den, welchen Menelaos der Alexandriner erfand und mitteilte."* Nun folgt der neue Beweis von Menelaos, danach ein anderer von Heron dem Mechaniker. [24])

Weitere Berichte aus griechischen (oder römischen) Quellen habe ich nicht finden können. [25]) Aus den zitierten geht aber schon folgendes hervor:

Menelaos, aus Alexandria gebürtig, war in Rom zur Zeit des Regierungsantritts des Kaisers Trajan (25. Jan. 98 n. Chr.) *mit astronomischen Beobachtungen, und zwar mit solchen, die zunächst zum Gebrauch eines Fixsternkatalogs zuträglich waren, beschäftigt* (man schliefst so wegen der Anwendung in Ptolemaios' *Syntaxis*). — *Menelaos' Zeitgenosse, der berühmte Schriftsteller Plutarch, kennt und schätzt einen Menelaos als tüchtigen Mathematiker.* — *Menelaos ist Verfasser einer Sphärik in mindestens zwei Büchern* (nach der arabischen Überlieferung wahrscheinlich drei). *In diesem Werk hat er dem sphärischen Dreieck den Namen τρίπλευρον gegeben, welcher Name später von den Griechen allgemein verwendet wurde* (vgl. unten Kap. 4, a u. c). *Im ersten Buche der Sphärik standen verschiedene Fälle von Kongruenz solcher Dreiecke.* — *Menelaos hat ferner wahrscheinlich eine*

---

21) Vgl. unten Kap. 6, a. 22) Vgl. unten Kap. 3.

23) Vgl. unten Kap. 3. 24) Vgl. unten Kap. 4, c.

25) Theon von Smyrna (Zeitgenosse des Menelaos) erwähnt ihn nicht; Nikomachos auch nicht. Spätere Verfasser wie Jamblichos (in dessen leider verlorener *Sphärik* man zunächst Berichte über Menelaos hätte erwarten können), Porphyrios, Eutokios und Diophant auch nicht.

Sehnenberechnung in 6 Büchern verfaſst, sowie eine Abhandlung über Untergänge der Zeichen des Tierkreises. Er hat einen neuen Beweis zu Euklid I 25 irgendwo veröffentlicht und einer transcendenten Kurve, die er „die wunderbare" nannte, seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Es giebt andere Berichte über Menelaos, nämlich die von den Arabern herrührenden, die jedoch mit gewisser Vorsicht aufzunehmen sind.

Auſser den Mitteilungen über die *Sphärik* und den Text derselben, denen wir ein eigenes Kapitel widmen wollen, sind es die folgenden:

1. Nach mehreren arabischen *Encyklopädien*[26]) hat Menelaos ein mechanisches Werk verfaſst, das ins Arabische übersetzt wurde. Über den Titel desselben gehen die Quellen auseinander.

So befindet sich nach Casiri[27]) im Escorial eine Handschrift (Cod. Escur. 905), wo (fol. 360) Menelaos gelobt wird. Es wird da gesagt: *„Seine Werke kamen erst in syrischer, dann in arabischer Übersetzung heraus. Er schrieb das Buch über sphärische Figuren und: 'liber de quantitate et distinctione corporum mixtorum'."*

Dagegen heiſst ein im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung enthaltenes Werk: *„Menelai ad Timotheum Regem Liber de Statica, ubi de Corporum mistorum quantitate et pondere."*

Letzteren Titel nimmt Steinschneider als richtig an.[28]) Einen dritten hat Wenrich,[29]) nämlich: *„De cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum."* Dieser Titel ist nach Suters Ansicht der richtige, weil El-Chazini (ca. 1100) in einer Abhandlung über die spezifischen Gewichte einfacher und zusammengesetzter Körper Archimedes und Menelaos als Gelehrte nennt, die sich mit dieser Frage beschäftigt haben.[30])

2. In *Kitab-el-Fihrist* wird Menelaos als Verfasser zu *„Elemente der Geometrie"*, redigiert von Tâbit ibn Korrah in 3 Traktaten, genannt.[28])

---

26) Es sind dies: *Kitab-al-Fihrist* von Abul Farag Muh. b. Ishaq (el Nadim); *Tarich el hokama* von Ibn el Kifti und *Lexicon bibliogr. et encycl.* von Haji-Khalfa, ed. Flügel, Leipzig 1835—58. — Das Mathematikerverzeichnis im *Fihrist* ist von H. Suter ediert, Zeitschr. f. Math. u. Physik **37**, Supplement.

27) Casiri, *Bibl. Arabico-Hispan. Escurialensis* I—II, Codices Math. I, p. 339 ff.

28) Steinschneider, *Arab. Übers.* § 112.

29) Wenrich, de auct. Graec. verss. Syriac. Arab. p. 211.

30) Suter, l. c. p. 226. In Suters Übersetzung von *Fihrist* heiſst der Titel: *„Über die Kenntnisse der Gröfse und Einteilung der verschiedenen Körper, verfaſst im Auftrag des Kaisers Domitian"*. Daſs mit Körper nicht Himmelskörper gemeint sind, wie Suter damals vermutete, ist später klar gelegt worden. Über den Namen „Domitian" thut man nach Steinschneider am besten zweifeln.

3. Dieselbe Bibliographie schreibt dem Menelaos ein *„Buch der Dreiecke"* zu, von welchem nur ein kleiner Teil ins Arabische übersetzt worden ist.[28])

Man mufs also annehmen, dafs ein bisher ganz unbekanntes mechanisches Werk von Menelaos, und zwar ein *hydrostatisches* im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung vorliegt. Es scheint uns dies nicht mit den übrigen Leistungen unseres Verfassers zu stimmen. Die griechischen Astronomen schrieben jedoch oft mechanische Werke, Hipparch z. B. *„περὶ τῶν διὰ βάρους κάτω φερομένων."*[31])

Über den Titel: *„Elemente der Geometrie"* schreibt Steinschneider: *„Dieses sonst unbekannte, verdächtige Buch ist von Kifti weggelassen, und Chwolson erwähnt es in seinem Verzeichnisse von Thabits Schriften gar nicht."* — Es würde aber mit der oben zitierten bisher unbeachteten Notiz von Proklos durchaus passen, dafs Menelaos ein solches Werk verfafst hat.[32])

Ob Menelaos vielleicht in diesem Buch oder in einem *„Buch der Dreiecke"* Reihen von Dreiecksätzen in der Ebene, die wir in Euklid nicht finden, den von ihm auf der Kugel bewiesenen analog, wie z. B. die vollständige Kongruenztheorie, gesammelt hat, lassen wir dahingestellt.

4. Im *„liber trium fratrum"* (ed. Curtze, p. 150)[33]) wird dem Menelaos *„in seiner Geometrie"* eine Würfelverdoppelung zugeschrieben, und zwar dieselbe, die man nach Eutokios allgemein dem Archytas von Tarent beilegt.

Der Erfinder dieser Würfelverdoppelung war jedenfalls Archytas; denn Eutokios[34]) sagt ausdrücklich: *„Ἡ Ἀρχύτου εὕρησις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ"*, und Eudemos, unsere beste Quelle, was die griechische Mathematik betrifft, lebte ca. 400 Jahre vor Menelaos.

Ob Archytas' Beweis vielleicht später in demselben Werke, in welchem Menelaos (nach Pappos' Bericht) die paradoxale Kurve behandelte, aufgenommen wurde, müssen wir dahinstellen. Archytas' Verfahren besteht in der Bestimmung des Schnittpunktes einer Kegelfläche mit einer cylindrischen Raumkurve (der sogen. Tore). Die paradoxale Kurve des Menelaos ist nach einer Hypothese von Tannery[34a]) dieselbe wie die Kurve des

31) Simplikios, *de coelo* I, p. 61 B.

32) Nachträglich erfahre ich, dafs Gino Loria in seinem Buch: *Le scienze esatte nell' antica Grecia* III, p. 60 den Bericht des Proklos zitiert.

33) *„Liber trium fratrum"* rührt von Muhammed, Ahmed und Alhasan, Söhnen des Mûsâ ibn Schâkir, die in der ersten Hälfte des 9. Jahrh. lebten, her. Curtzes Ausgabe befindet sich in Nova acta der ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher 49, Halle 1885.

34) Archimedis *opera omnia*, ed. Heiberg III, p. 98 ff.

34a) Vgl. Tannery, *Notes pour l'histoire des courbes et des surfaces dans l'antiquité*, Bullet. des sciences math. et astr. Tome VII—VIII.

Viviani, d. h. die Kurve von doppelter Krümmung, die durch Schnitt einer Cylinderfläche mit einer Kugel entsteht. Angenommen, dafs Tannerys Hypothese richtig ist, so würden wir uns allerdings leicht vorstellen können, dafs Menelaos den Beweis des Archytas reproduziert hat.[35])

Auch über die astronomische Thätigkeit des Menelaos finden wir Aufschlüsse bei den Arabern. Die in Frage kommenden Nachrichten habe ich anderswo (Bibl. math. 1901, p. 196ff.) zusammengestellt. Die Resultate dieser Untersuchung werde ich hier kurz wiederholen:

1. Al-Battani († ca. 928) stützt seine Bestimmung der Präcession der Nachtgleichen (vgl. Albategnius, *De numeris et motu stellarum fixarum, transl. a Platone Tiburtino, Bononiae 1645, p. 201—202*) auf drei Observationen, die er dem Menelaos zuschreibt. Die eine dieser Observationen hat er der *Syntaxis* entnommen, wie er auch selbst sagt.

Für die zwei anderen scheint er sich auf ein Werk von Menelaos selbst zu stützen. Wenigstens geht es aus den Zahlenwerten dieser zwei Längenbestimmungen hervor, dafs dieselben kaum mit Hilfe der *Syntaxis* des Ptolemaios von Al-Battani unterschoben sein können. Dann werden wir aber gezwungen anzunehmen, dafs Al-Battani in der That authentische von der *Syntaxis* unabhängige Berichte über Fixsternbestimmungen des Menelaos besafs.

Es scheint zunächst, dafs Ptolemaios und Al-Battani aus den ihnen zur Verfügung stehenden menelaischen Bestimmungen nur einzelne für ihre Präcessionsberechnung besonders geeignete herausgegriffen haben. Die vier überlieferten Bestimmungen (Sirius, Regulus, Spica und β Scorpii) lassen uns auch annehmen, dafs Menelaos' Fixsternbestimmungen eine beträchtliche Anzahl ausgemacht haben. Dagegen scheinen sie nicht besonders gut gewesen zu sein, indem die Längen im allgemeinen ca. 1^0 zu klein geworden sind. Die Ursache ist wahrscheinlich ein Irrtum in Bezug auf den Unterschied des siderischen und des tropischen Jahres.

Die fehlerhafte Präcessionsberechnung in Ptolemaios' *Syntaxis* ist wahrscheinlich eine Folge dieses Irrtums, die auch die Präcession des Al-Battani beeinflufst haben dürfte, obwohl natürlich in minderem Umfang.

Bemerkenswert ist, dafs Al-Battani offenbar viel mehr Vertrauen zu Menelaos' Bestimmungen hatte als zu denen des Ptolemaios. Da die

35) Nach Curtze, l. c. p. 158 wird im *liber trium fratrum* auch die archimedische Berechnung der Kugel-Oberfläche und -Volumen der *„Geometrie"* des Menelaos zugeschrieben. Dies beruht aber lediglich auf einer unrichtigen Textkorrektur; vgl. meinen Aufsatz in Bibl. math. 1902, *Über zwei math. Hss. aus dem 14. Jahrh.*

von Ptolemaios angenommene Präcession nach Al-Battani falsch war, und man nach dem Inhalt von Ptolemaios' 7. Buch annehmen mufste, dafs sein Fixsternverzeichnis nicht ein Ergebnis eigener Beobachtungen, sondern eine Kompilation aus den Arbeiten seiner Vorgänger war, so war es notwendig, einen dieser Vorgänger als den eigentlichen Beobachter zu betrachten, und dementsprechend die Längen im Ptolemaios zu korrigieren. Al-Battanis Bericht zeigt uns, dafs man damals den Menelaos als diesen wahren Beobachter betrachtete. Noch bestimmter entschied sich ein Nachfolger des Al-Battani für Menelaos, nämlich:

2. Abul-Hosein Abdalrahman Al-Sûfi († 986). Er berichtet in seiner *„Abhandlung über die Fixsterne mit Figuren"* (ediert von Schjellerup St. Petersburg 1874, p. 42), dafs Ptolemaios sein Fixsternverzeichnis durch Addition von 25 Minuten zu den Längenbestimmungen des Menelaos herstellte, und zwar bei allen in seinem Katalog aufgenommenen Sternen. Es stimmt dies allerdings mit den Angaben in der *Syntaxis* in Bezug auf die zwei in diesem Werke referierten Beobachtungen des Menelaos. Es stimmt aber keineswegs für die zwei von Al-Battani dem Menelaos zugeschriebenen Längenbestimmungen, von denen die eine um 40′, die andere um 20′ von den Längen in Ptolemaios' Katalog abweicht.

Durch die Behauptung aber, dafs Menelaos ein grofses Fixsternverzeichnis verfafst hat, erreicht Al-Sûfi, den Katalog des Ptolemaios als einen für eine bestimmte Zeit gültigen verwenden zu können. Dementsprechend hat er auch mit Hülfe der Präcession des Al-Battani die Längen im Ptolemaios, nachdem er dieselben zuerst auf die Zeit des Menelaos zurückgeführt hat, zur Herstellung seines eigenen Fixsternkatalogs benützen können.

Aus diesen Gründen können wir dem Bericht des Al-Sûfi keinen Glauben schenken, sondern müssen ihn als eine aufgebauschte Interpretation betrachten, die Al-Sûfi brauchte, um sein eigenes Verfahren nicht in Mifskredit zu bringen.

Al-Sûfis Werk wurde um das Jahr 1256 ins Kastilianische unter dem Titel *„Abolfazen* (oder *Albohazen*): *Libro de las estrellas"* übersetzt, und der Bericht über Menelaos' grofses Fixsternverzeichnis wurde bis auf Copernicus und Tycho Brahe als authentisch betrachtet (vgl. die oben erwähnte Abhandlung in Bibl. Math. 1901, p. 196 ff.).

3. Haji-Khalfa (ed. Flügel III, p. 471) notiert in seinem Werkverzeichnis: *„observationes astronomicae a Menelao anno 854* (d. h. 107 n. Chr.) *factae."*

Die vorhergehende Zusammenstellung der uns überlieferten Berichte über Menelaos zeigt, dafs seine Verfasserwirksamkeit wenigstens folgendes umfafst:

1. **Sphärik** (3 Bücher).
2. **Über die Geraden im Kreise** (6 Bücher).
3. **Hydrostatik.**
4. **Abhandlung über die Untergänge der Tierkreiszeichen.**
5. **Elemente der Geometrie** (3 Bücher?).

---

6. Irgend eine Publikation **über transcendente Kurven.**
7. Eine Reihe von **Fixsternbestimmungen.**
8. **Buch der Dreiecke?**

Zweites Kapitel.

Die Überlieferung der Sphärik.

Der griechische Text der *Sphärik* ist wie gesagt verloren, und unsere Kenntnisse derselben verdanken wir also lediglich den arabischen oder den nach denselben gemachten hebräischen und lateinischen Übersetzungen. Weil aber die Araber nach ihrer Gewohnheit das von ihnen hoch geschätzte Werk immer neu revidierten, ist die Überlieferungsgeschichte eine ziemlich verwickelte geworden.

Zu meinen Untersuchungen stand mir zuerst nur die Druckausgabe von Halley zur Verfügung.[36]) Ich fühlte aber bald, dafs ich nach einer ganz unsicheren Grundlage arbeitete. In einem Beweis wurde nach dieser Ausgabe die sinus versus-, in Corollaren die tangens-Funktion gebraucht. Die Griechen hatten aber, wie bekannt, keine Kenntnis dieser Funktionen. Überhaupt kam mir vieles in den Beweismethoden ungriechisch vor. Aufserdem war es mir überhaupt unmöglich, Halleys Zusätze von dem Text der *Sphärik* zu unterscheiden.

Es gelang mir dann, die Maurolycusausgabe[37]) zur Hand zu bekommen. Dieselbe war jedoch ganz unanwendbar. In der Vorrede sagt der Herausgeber selbst, dafs er *„nicht möglichst viele, sondern passende"* Theoreme von ihm selbst hinzufügen würde. Die letzte Hälfte des dritten Buches

---

36) Menelai *Sphaericorum libri III,* quos olim, collatis MSS. Hebraeis et Arabicis Typis exprimendos curavit Vir. Cl. Ed. Halleius; Praefationem addidit G. Costard, Oxonii 1758.

37) Theodosii *Sphaericorum elementorum libri III* ex trad. Maurolyci Messanensis Mathemathici; Menelai *Sphaericorum libri III* ex trad. eiusdem; Maurolyci *Sphaericorum libri II* etc. Messanae 1558.

hat er nicht mitgenommen, weil er sie für eine genauere Erörterung in seiner eigenen *Sphärik* zurückhalten wollte.

Es wurde mir klar, dafs ich zu den Handschriften Zuflucht nehmen mufste, und zwar zu den lateinischen, weil ich die arabischen so wenig wie die hebräischen lesen konnte.

Nun steht im Verzeichnisse[38]) über die von Gerhard von Cremona am Schlufs des 12. Jahrhunderts zu Toledo erledigten Übersetzungen aus dem Arabischen:

„liber Milei tractatus III."

„Mileus" ist aber nur eine durch Mifsverständnis des Arabischen hervorgerufene Verdrehung von „Menelaos".

Diese älteste lateinische Übersetzung vermutet Steinschneider[39]) in dem oben erwähnten Pariser Codex Nr. 9335 zu finden; denn da befindet sich ein *„liber Mileij de figuris spericis"* in 3 Traktaten (Büchern). Einzelne andere lateinische Menelaoscodices sind ihm und anderen bekannt, jedoch nur dem Namen nach.

Nach den Katalogen und Handschriftenverzeichnissen nahm ich mir vor, das vorliegende Material genauer zu konstatieren, und es gelang mir, die Existenz von 17 bis 18 lateinischen Handschriften festzustellen, die nach den Titeln alle Menelaos' *Sphärik* enthalten. Von 9 dieser Handschriften kann ich konstatieren, dafs sie alle Abschriften derselben mittelalterlichen lateinischen Übersetzung sind, indem ich 5 selbst kollationiert habe, während mir mein früherer Kollega cand. Raphael Meyer über die 4 anderen, die alle in Rom liegen, wertvolle Aufschlüsse gegeben hat. Die 5 von mir kollationierten sind:

1. Cod. Parisinus Arsenalis 1035, 15. Jahrh.[40])
2. Cod. Parisinus 9335 (Bibl. nationale), 14. Jahrh.[41])
3. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 90, 14. Jahrh.
4. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 63, 15. Jahrh.[42])
5. Cod. Vindobonensis 5277, ca. 1525.[43])

38) Vgl. Boncompagni, *della vita e delle opere di Gherardo Cremonese,* Roma 1851; Wüstenfeld, *Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische,* Abh. d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **22**, u. a.

39) Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 483 ff.

40) *Catal. des manuscrits de la bibl. de l'Arsénal,* par M. Martin II, p. 246, Paris 1886; vgl. Leclerc, l. c. II, p. 410 u. 492.

41) *Inventaire des manuscrits latins conservée à la bibl. nat. sous les numéros 8823—18613,* par L. Délisle, Paris 1863—71, p. 28; vgl. oben Steinschneider und Leclerc. Eine Beschreibung ds. Hs. gebe ich in Bibl. math. 1902.

42) *Bibl. manuscripta ad S. Marc. Venetiarum* digessit J. Valentinelli, Venetiis 1871, Codd. mss. lat. IV, p. 218, 249 u. 266; vgl. unten Note 168.

43) *Tabulae codd. mss. praeter Graecos et orientales in Bibl. Palatina-Vindob.*

Die vier Handschriften, die nach den Aufschlüssen von Hrn. Meyer denselben Text enthalten, sind:

6. Cod. Vaticanus 4571 e Fondo Vaticano.

7. Cod. Vaticanus 1351 e Fondo Palatino.

8. Cod. Vaticanus 1261 e Fondo Reginae Sueciae.

9. Cod. Vaticanus 1268 e Fondo Reginae Sueciae.

Mit Sicherheit vermute ich denselben Text in folgenden 6 Handschriften:

10. Cod. Digby 168 (Oxford): *„Excerpta ex libris Milei sive Menelai Alexandrini de figuris sphaericis"*, 13. Jahrh. (nur Fragmente).

11. Cod. Digby 178 (Oxford): *„Propositiones in libris tribus Sphaericarum Menelai sive Milei additis hic illic demonstrationibus"*, 14.—15. Jahrh. (nur Fragmente).[44])

12. Cod. Rheno-Trajectoriae (Utrecht) 725 *„Mylaeus, opus de figuris sphaericis"*, 15. Jahrh.[45])

13. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 5. *„Menelai de figuris sphaericis"*, 15. Jahrh.[42])

14. Cod. S. Marco Florent. 184. *„Tractatus Milaei et Campani"* (defekt).

15. Cod. S. Marco Florent. 203. *„Mileii Romani de figuris sphaericis."*[46])

Dagegen enthält:

16. Codex Parisinus 7251: *„Menelai Sphaericorum libri tres Fr. Maurolyco interprete"*, 16. Jahrh.[47]) wohl entweder eine Abschrift der Maurolycusausgabe, oder aber gehört dieser Codex dem schriftlichen Nachlafs dieses Herausgebers.

17. Cod. Bodleianus 6556. 9. *„Menelai Sphaerica quamplurimis Maurolyci et Savilii propositionibus adaucta"*[48]) ist ohne eine genauere Untersuchung überhaupt nicht zu beurteilen.

18. Aufserdem liegt vielleicht in Cuença (Spanien) eine sehr alte Menelaoshandschrift; denn im *„Inventario de las alaja Mueblas y libro"* des

---

IV, Wien 1870, p. 82—83. Diese Wienerhandschrift ist von Johs. Vögelin geschrieben.

44) *Catal. Mss. Angliae et Hyberniae*, Oxford 1697; und *Catal. Codd. Mss. Bibl. Bodleianae IX*, Codd. a Kenelm Digby anno 1634 donatos, confecit Macray, Oxford 1883; vgl. Steinschneider, Wenrich u. a.

45) *Cat. codd. mss. bibl. universitatis Rheno-Trajectoriae*, ed. Thiele, Utrecht 1887.

46) Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, Atti dell' accad. pontif. de'nuovi lincei tomo IV, p. 279—280; Montfaucon, *Bibl. bibliothecarum mss. nova*, Paris 1739, I, p. 427; Steinschneider, *Zeitschr. f. Math. u. Physik* **10**, p. 484.

47) *Cat. codicum mss. bibl. regiae III*, Tome IV, Paris 1744; vgl. Fabritius IV, p. 24.

48) *Cat. Mss. Angliae et Hyberniae*, Oxford 1697.

Bischofs Palomeque vom Jahre 1273 befindet sich eine Bücherliste, worin als Nr. 29: „Alfagrano, Teodosio, Anarico, **Mileo**, *con otros libros de geometria.*" Über die Sprache, worin sie verfafst ist, wird nichts angegeben.[49])

— —

Wir sehen also, dafs wir vor der Maurolycusausgabe[50]) nur *eine* lateinische Übersetzung finden, und dafs die Handschriften, die sie enthalten, meistens, ja bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts ausschliefslich den verdrehten Namen Mileus, Mileius, Milaeus oder Mylaeus haben. Wenn aufserdem die Mileushandschriften sich vom 13. Jahrhundert bis zum Anfang des 16. erstrecken, so stimmen diese Thatsachen durchaus damit überein, dafs diese Übersetzung von Gerhard von Cremona ist. Auch hat aufser Gerhard unseres Wissens niemand vor Maurolycus es versucht, Menelaos zu übersetzen.

Die Redaktion der *Sphärik*, die wir hier vor uns haben, ist durch folgende Eigentümlichkeiten gekennzeichnet:

1. Das Werk ist in 3 Bücher geteilt und zwar mit bezw. 44 oder 45, 8 und 15 Sätzen.

2. Definitionen fehlen ganz.

3. Das erste Buch ist in gewissen Beziehungen von den zwei folgenden verschieden; so wird *„sphärisches Dreieck"* (*τρίπλευρον*) im ersten Buche *„triangulus ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae"*, in den zwei letzteren *„trilatera figura"* genannt. Das erste Buch ist aufserdem genauer und umständlicher als die zwei anderen. Wir können deshalb vermuten, dafs wir hier eine Mischung von zwei verschiedenen Redaktionen oder eine Redaktion von zwei Bearbeitern vor uns haben.

4. Hiermit stimmt es durchaus, dafs I, 41—44 (oder nach anderen Mileushandschriften I, 42—45) als II, 1—4 wiederholt wird, und zwar in anderer Redaktion.

5. Für *„sinus"* wird *„nadir arcus"* gebraucht. In dem griechischen Text stand ohne Zweifel *ἡ ὑπὸ τὴν δίπλυν* (d. h. die Sehne des doppelten Bogens).

---

49) Francisco Martinez Marina, *Ensayo historico-critico sobre la legislacion*, Madrid 1834, I, p. 8; vgl. R. Beer, *Die Handschriftenschätze Spaniens*, Wien 1894, p. 127. — Anarico ist wahrscheinlich Anaritius, d. h. Al-Narizi, dessen *Euklid-Kommentar* kürzlich arabisch von Besthorn u. Heiberg, lateinisch von Curtze ediert wurde; vgl. Bibl. math. 1901, p. 364—65.

50) Deutschland, das sonst gar keine lateinischen Menelaoshandschriften zu besitzen scheint, hat wiederum eine Abschrift der Druckausgabe von Maurolycus und zwar in Erlangen, Cod. 909. Der Abschreiberlohn war 3 fl. 50 d., wie es der Katalog mitteilt.

Eine dem Griechischen entsprechende Bezeichnungsweise hat sich vielleicht in den älteren arabischen Menelaoscodices erhalten, wodurch der Gebrauch von *„nadir arcus“* in der Mileusübersetzung sich erklären läfst; denn *„nadir arcus“* wird so definiert: *„Et ego quidem non significo, cum dico nadir arcus, nisi lineam, qui subtenditur duplo illius arcus.“* — In späteren arabischen Menelaoshandschriften wird *„sinus“* gebraucht, ebenfalls in den beiden Druckausgaben, obwohl Maurolycus die Bezeichnung *„nadir arcus“* kennt.

6. Man spürt deutlich eine Einteilung des Textes in mehr als die erwähnten 44 (45), 8 und 15 Sätze, und zwar durch nach den einzelnen Beweisabschnitten eingeschaltenen: *„et illud est quod declarare uoluimus.“*

Diese älteste lateinische Gerhardsche Mileusübersetzung habe ich nun mit den Druckausgaben verglichen, und zwar mit dem Resultate, dafs der Text, den Halley zu seiner Druckausgabe gebraucht hat, von derselben arabischen Redaktion stammt, während dagegen der mit Zusätzen übersäeten Maurolycusausgabe eine andere arabische Redaktion zu Grunde lag.

Zur Basis meiner Untersuchungen habe ich nun hauptsächlich die Gerhardsche Übersetzung gebraucht, oder, was dasselbe ist, die Halleyausgabe nach dieser Übersetzung korrigiert.

Ich bin doch in der glücklichen Lage, Stellen, namentlich im dritten Buche, die ein besonderes Interesse haben, mit anderen Redaktionen vergleichen zu können, indem ich von Hrn. Dr. R. Besthorn verschiedene wichtige Aufschlüsse über zwei arabische Leidenercodices (399[51]) u. 930) bekommen habe. Überall, wo ich diese Codices erwähne, geschieht es also nur durch das freundliche Entgegenkommen Dr. Besthorns.

Durch seine Aufschlüsse wird es bestätigt, dafs die verschiedenen Menelaosrezensionen wenigstens stellenweise ziemlich viel von einander abweichen. Der sogenannte „Satz des Menelaos“ ist z. B. im cod. Leid. 930 und in der Redaktion, die Gerhard und Halley verwendeten, ganz verschieden redigiert.[52])

Eine genaue Untersuchung des Unterschiedes der Redaktionen läfst sich nur durch gewissenhafte Prüfung der arabischen Handschriften bewerkstelligen. Die Berichte der arabischen Encyklopädisten soundsovielmal wieder abzudrucken, ist dagegen eine ziemlich erfolglose Arbeit. Weil ich es aber nicht besser machen kann, beschränke ich mich auf eine ganz kurze Übersicht der verschiedenen Rezensionen in chronologischer Folge.[53])

---

51) c. 399 enthält die Redaktion von Al-Harawi, 930 die von Abu-Nasr-Mansur.

52) Vgl. unten Kap. 6, b.

53) Die wichtigsten Notizen über die Rezensionen des Menelaostextes stehen

Menelaos richtet seine Vorrede an einen Fürsten (El-Ládzi nach Haji-Khalfa) mit den Worten: *„O princeps! inveni ego rationem demonstrativam praestantem etc.“* So fängt nach Besthorn auch cod. Leid. 399 an.

Die Übersetzung rührt angeblich von Isak ben Honein († 910) her; dieser wird nämlich in mehreren Handschriften als Übersetzer genannt. Ob Thâbit ibn Korrah († 901), der im Anschluſs an Menelaos' *Sphärik* (doch ohne Menelaos zu nennen) eine Abhandlung verfaſst hat, zu dieser ältesten Übersetzung beigetragen hat, lassen wir vorläufig dahingestellt.[54])

Die verschiedenen Redaktionen, die wohl durch Revision der ältesten Übersetzer entstanden sind, stammen von:

1. **Al-Mahâni** (Zeitgenosse von Thâbit ibn Korrah); er nahm, um das Werk verständlicher zu machen, eine Revision vor, brachte aber nur das erste und die Hälfte des zweiten Buches zu Ende; der Rest ist von **Ahmed-ben-Said-al-Harawi** (Zeit unsicher) erledigt worden. — Diese Redaktion liegt im Cod. Leid. 399 vor und enthält zwei Bücher.

2. **Abu-Nasr-Mansur;** er beendigte eine neue Redaktion in den Jahren 1007—8. — Diese liegt im Cod. Leid. 930 vor und enthält drei Bücher.

3. Zeitlich folgt hier die lateinische Übersetzung von **Gerhard von Cremona** (1114—1187), deren Eigentümlichkeiten ganz mit denen übereinstimmen, die wir der Redaktion von Al-Mahâni und Al-Harawi zutrauen möchten. Es scheint doch dies nicht aus den Handschriften hervor zu gehen.

4. **Nassir-eddîn-Tûsi** war mit den verschiedenen Redaktionen in Verlegenheit, blieb aber bei der von Nasr-Mansur, und beendigte seine durch Revision der vorigen gemachte Redaktion im Jahre 1265; sie enthielt drei Bücher.[55])

5. **Ibn-abu-Schukr** unternahm um 1265 wahrscheinlich noch eine Redaktion.[56])

---

in Haji-Khalfa, ed. Flügel I, p. 390 und V, p. 48 und rühren angeblich von Nassir-eddin-Tûsi her.

54) In Thâbit ibn Korrahs Werk: *De figura sectoris* finden sich nämlich keine sicheren Spuren davon, daſs er Menelaos' *Sphärik* gekannt hat. Thâbits Werk, von dem bisher nur Fragmente bekannt geworden sind, habe ich nach cod. Paris. Arsenal. 1035 (lateinisch) untersucht.

55) Diese Redaktion liegt im cod. Berol. M. f. 358 und M. q. 559 vor; vgl. Steinschneider, Bibl. math. 1898, p. 73 ff. Auch Cod. Palat.-Medic. 271 und 286 (Firenze) sollen diese Redaktion enthalten.

56) Diese Redaktion liegt in India Office (London) 741 vor; vgl. Loth, *Catalog of the Arabic Manuscripts in the library of the India Office,* London 1877. Steinschneider kennt im ganzen 15 arabische und 3 hebräische Menelaoshandschriften; vgl. *Arab. Übersetz.* Register.

6. Eine hebräische Übersetzung besorgte **Jacob ben Machir** (Prophiat) († 1307—9) aus der Familie Tibbon aus Marseille um das Jahr 1273.[57])

Über andere Bearbeitungen oder Übersetzungen vor der Maurolycusausgabe (1558) liegen keine Berichte vor.

Nach den Angaben von Nassir-eddîn-Tûsi war die Büchereinteilung und die Anzahl der Sätze sehr verschieden; letztere variierte im ganzen zwischen 85 und 91. Bei Halley treffen wir aber nur 63 und in der Übersetzung von Gerhard wegen der erwähnten Wiederholung von 4 Sätzen 67. Dieser Unterschied kommt aber nur davon, dafs die Araber die Beweise des griechischen Originaltextes zerteilt haben, und zwar nach den Figurbeschreibungen, sodafs sie meistens für jede neue Figur einen neuen Satz zählen. In der Halleyausgabe haben wir in den nach den einzelnen Beweisabschnitten hineingefügten „q. e. d." ein Kriterium für die arabische Einteilung.

Rechnet man nach der Araber Art, so bekommt man bei Gerhard, sowie bei Halley ca. 90 Sätze. Jeder in der griechischen Darstellungsweise bewanderte Forscher würde jedoch sogleich, wie es Gerhard gethan, die ursprüngliche Einteilung wiederherstellen.

Dafs aber auch die arabischen Redaktionen gegenseitig eine verschiedene Satzanzahl haben, kommt wohl, aufser von der Wiederholung der 4 Sätze im zweiten Buch, von verschiedener Scandierung der ursprünglichen Sätze und von hinzugefügten aliter-Beweisen, welche letztere nach Besthorn als selbständige Sätze numeriert sind.

Überhaupt, glaube ich, werden die Abweichungen sich auf ganz verschiedene Beweise einzelner Sätze beschränken, bei denen man leicht entscheiden kann, ob sie griechisch sind oder nicht, ferner auf aliter-Beweise, und übrigens auf formale Abweichungen, nämlich Sprach-Einteilungs- oder Figurdifferenzen, sodafs es mit Herannahme hinreichlichen Handschriftenmaterials nicht unüberwindliche Schwierigkeiten bieten wird, den realen mathematischen Inhalt des ursprünglichen Textes festzustellen.

---

57) Vgl. Steinschneider, *Hebräische Übersetzungen* II, p. 516.

Drittes Kapitel.

Die Druckausgaben der Sphärik.

A. Die Halleyausgabe (Oxford 1758).

Steinschneider[58]) giebt mehrmals seinem Bedauern darüber Ausdruck, dafs die Vorrede, mit der Costard diese Ausgabe (die erst 1758 erschienen ist, während Halley schon 1742 gestorben war) einleitet, in den ihm bekannten Exemplaren fehlt. Das mir zur Verfügung stehende Exemplar aus der kgl. Bibliothek zu Kopenhagen enthält glücklicherweise diese Vorrede.

Aus dieser geht folgendes hervor: Halley hat seine Übersetzung hauptsächlich nach der hebräischen gemacht. Nach verschiedenen Zeugnissen glaubt Costard, dafs er namentlich Codex Huntington 6270. 524[59]) (derselbe wie Bodl. Uri 433) gebraucht hat. Vermutlich hat er, meint Costard, auch Codex Huntington 6303. 557[59]) (Bodl. Uri 431) verwendet. Derselbe führt den Titel: *„Codex (Menelai) de figuris Sphaericis ex Versione R. Isaaci filii Honaini."* Die beiden Handschriften sind hebräisch, letztere defekt. — Aus Halleys Noten erhellt, dafs er auch arabische Handschriften verglichen hat. Costard glaubt, dafs es die im Archiv Selden A. Nr. 5 u. 6 sind (d. h. Bodl. Uri 875 u. 895). Im Schlufs der Vorrede polemisiert Costard gegen Pater Mersenne und die von diesem mit ganz ungenügenden Erläuterungen versehene, im Jahre 1644 besorgte Menelaosausgabe.

Ich glaube jedoch, dafs Halley die arabischen Codices sehr wenig benutzt hat. In seinen Noten sagt er stets, dafs er hier wie sonst den hebräischen Handschriften gefolgt ist; mehrmals referiert er hebräische Worte, nur einmal ein arabisches. Deshalb bezweifle ich nicht, dafs wir in der Halleyausgabe eine freie lateinische Übersetzung der hebräischen von Jacob ben Machir vor uns haben.[60]) Ob aber letzterer dieselbe arabische Redaktion wie früher Gerhard verwendet hat, oder ob er vielmehr Gerhards lateinische Übersetzung gebraucht hat, ist von geringerem Interesse; denn in beiden Fällen ist die direkt nach dem Arabischen vom gewissenhaften Gerhard unternommene Übersetzung zuverlässiger als der Text der Halley-

58) Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 481—482; *Hebräische Übersetzungen* II, p. 516.

59) Vgl. *Cat. Mss. Angliae et Hyberniae* und die Erläuterungen von Steinschneider.

60) Vgl. oben Seite 16.

ausgabe, der entweder den Weg arabisch-hebräisch-lateinisch oder gar arabisch-lateinisch-hebräisch-lateinisch zurückgelegt hat. Aus einem Vergleich zwischen den Texten Gerhards und Halleys ergiebt sich folgendes:

Halley beginnt mit 6 Definitionen[61]), die wir bei Gerhard nicht finden. Die Echtheit dieser Definitionen steht doch über allem Zweifel, denn:

1. finden wir sie in mehreren arabischen Codices (z. B. Leidensis 399),

2. ist der in der ersten Definition definierte Begriff „τρίπλευρον" (sphärisches Dreieck) nach Pappos von Menelaos benannt,[62])

3. liegt eben in der Umschreibung des Wortes τρίπλευρον im ersten Teil der Gerhardschen Übersetzung die Erklärung des Weglassens der somit unnotwendigen Definitionen.

4. läfst es sich leicht erklären, dafs die Definitionen mit der Vorrede weggefallen sind. Ein Vergleich mit anderen Übersetzungen von Gerhard zeigt nämlich, dafs dieser immer die arabische Vorrede ausschliefst.

Die Büchereinteilung, die ja in den arabischen Redaktionen sehr verschieden war, ist bei Halley die einzig natürliche, wenn überhaupt mehr als ein Buch da war, und dafür bürgen uns die Berichte des Theon.

Dafs wir bei Gerhard eine andere Einteilung fanden, kam davon, dafs die von ihm gebrauchte arabische Redaktion von zwei Rezensenten gemacht war. Halley aber folgt hier ausnahmsweise und mit Recht den arabischen Oxforder Codices und nicht der hebräischen Handschrift, wo übrigens die Bücherabteilung doppelt war.[63]) — Wir müssen also die Halleyausgabe als eine gewissermafsen kritische betrachten; leider hat er aber seine Quellen schlecht gewürdigt und die schlechteste zur Hauptquelle gewählt.

Folgende Teile aus der Halleyausgabe, meistens kursiv gedruckte Zusätze von Halley, sind unecht:

Die Corollaren zu I, 20, 29, 30, 31, 32, 33, 34 u. 35. — Die nach I, 30 Corollar 2, kursiv gedruckten 4 Zeilen. — Die 9 Seite 63 mit kursiv gedruckten Zeilen im Beweise zu II, 7. — Lemmata und Theorema nach III, 1. — Die Corollaren zu III, 2, 3, 5 u. 15. — Der ganze Beweis zu III, 5. — III, 11 Lemma. — Die Kursivzeilen Seite 106—7 in III, 14.

Die Scholien sind fast alle von Halley verfafst. — III, 1, der sogen. Satz des Menelaos, nimmt eine besondere Stellung ein.[64]) So wie dieser Satz in der von Gerhard und Halley benutzten Redaktion redigiert war, war er es nicht in der Sphärik; denn die Protase fehlt und die Figurbuchstaben fangen mit *A*, *M*, *T* u. s. w. an. Hier liegt entweder eine arabische

61) Vgl. unten Seite 25—26. 62) Vgl. oben Seite 4 und unten Seite 26.
63) Vgl. die vorhergehende Seite. 64) Vgl. unten Kap. 6, b.

Interpolation vor, oder aber gehört der Satz in dieser Form einem *astronomischen* Werke griechischen Ursprungs an. Wie der Satz ursprünglich war, können wir doch mit Hülfe von Cod. Leid. 930, Ptolemaios und Theon ausfindig machen. — Wie der ganz unechte Beweis III, 5 entstanden ist, werden wir in einem späteren Kapitel genauer erörtern.

Mit den hier genannten Korrektiven läfst sich nun die Halleyausgabe ganz gut verwenden, wenn man nicht ins Detail gehen will. Der mathematischen Beurteilung genügt es, dafs die Sätze *alle* und der Gedankengang der Beweise, mit Ausnahme von III, 1 u. 5, echt sind.

B. Die Maurolycusausgabe[65]) (Messina 1558).

Aus der Vorrede referiere ich folgenden Passus:

„Hos Menelai libellos cum ego in antiquis ex membrana codicibus reperissem conatus sum eos, quoniam corruptissimum erat exemplar, emendare et restituere, nec non quam plurimis tum necessariis tum argutis adaugere proportionibus.“[66])

Mehr erfahren wir über Maurolycus' Hülfsmittel und Arbeitsmethode nicht; das genügt aber vollständig, um die Anwendbarkeit, oder vielmehr die Unanwendbarkeit dieser Ausgabe zu beurteilen. Eine weitere Bestätigung dafür giebt uns der offenbare Unterschied zwischen dieser Ausgabe und der Gerhardschen Übersetzung. Dieser Unterschied zeigt uns auch, dafs die bisherige Vermutung, Maurolycus habe letztere ver-

65) Zur Zeit des Maurolycus war man sehr eifrig, eine Druckausgabe von Menelaos' *Sphärik* zu erledigen. Auria berichtet in der Vorrede zu seiner Ausgabe von Theodosios' *de diebus et noctibus* (Romae 1591, vgl. oben), dafs Herzog Ferdinand beabsichtigte, viele mathematische Klassiker im Druck erscheinen zu lassen, darunter auch Menelaos' *Sphärik;* schon Regiomontanus beabsichtigte, eine Menelaosausgabe herzustellen.

66) Genauere Aufschlüsse habe ich später in einem erst in der Neuzeit edierten Werke des Maurolycus erhalten. Es steht da (Bulletino Boncompagni 9, p. 28): *„Post haec, locus dandus est Menelao, quem et Mileum quidam uocant, qui Traiani tempestate claruit; et reliqua de sphaericis ingeniosissime prosecutus est in totidem libellis: unde Ptolomeus astronomus praecipuas demonstrationes mutuatur Mihi olim libros curiose perquirenti oblata sunt exemplaria duo Menelai manu scripta in membranis: quorum utrumque mutilatum et mox male resartum fuerat: nam pro demonstrationibus, quae maximi fuerint momenti continebat inuolucra quaedam nihil concludentia. Neque author ipse, si reuixisset, suum agnouisset opus. Hoc ego, antea diu desideratum multo labore, vigiliisque reuisum restituere conatus compluribus tam iucundis, quam necessariis adauxi propositionibus. Ex hoc quidem pendet tota fere sphaeralium triangulorum doctrina, et tabularum primi mobilis calculus.“*

wendet, falsch ist. Am wahrscheinlichsten ist es, dafs er arabische Handschriften gebraucht hat; denn nach der vorhergehenden Untersuchung lagen zur Zeit des Maurolycus eben nur arabische Handschriften verschiedener Redaktionen, Gerhardsche Mileuscodices und einige hebräische Handschriften derselben Redaktion wie die Mileushandschriften vor. Dafs Maurolycus in der Vorrede *„nadir arcus“* erwähnt, sagt dagegen nichts; denn diese Bezeichnung für *„corda dupli arcus“* war schon von Gerhard eingebürgert; ebensowenig sagt es, dafs er den Namen Menelaos und nicht mehr Mileus verwendet; denn die Identität dieser Namen war schon dem mathematischen Kleeblatt: Kardinal Bessarion — Georg Peurbach — Johs. Regiomontanus in der Mitte des 15. Jahrhunderts bekannt.

Wie gesagt, bietet uns die Maurolycusausgabe kein anmutiges Bild. Als Beleg mögen folgende Beispiele genügen:

Menelaos' Definitionen „mit anderen hinzugefügten“ stehen in der „Vorrede“ (!).

Unecht ist: I, 1 — die Corollaren, aufser dem ersten, zu I, 2 — I, 7, 8 — der Beweis zu I, 11 — der letzte Beweis zu I, 12 — das Corollar zu I, 14 — I, 15, 16, 17, 18, 19 — I, 20 teilweise — I, 36 — das Lemma zu I, 42 — der Beweis zu I, 44 — II, 1—6 (bei Halley II, 1—2) hat Maurolycus ganz umgearbeitet.

Unecht ist ferner: II, 8, 11—16, 19—20, 23—26, 30—32, 34—36, 39—40, 43—44 u. 47—48, während ein Halley II, 9 entsprechender Satz fehlt. — III, 2 ist unecht. — III, 7—8 ist frei umgearbeitet. — III, 11^{3}, 12—14, Lemmata 1—4 zu III, 21, III, 22 mit Lemmata sind alle unecht. — Dagegen fehlen die Halley III, 7^{2}, 11—14 u. 15^{3-5} entsprechenden echten Sätze; sie finden sich aber in der *Sphärik* des Maurolycus, deren Kern sie bilden.

Man sieht sofort, wie wenig Wert der Maurolycusausgabe beizumessen ist. Es wäre durchaus besser gewesen, wenn sie nicht erschienen wäre, sodafs man auf die Gerhardhandschriften hingewiesen worden wäre.

Wir führen gleich an dieser Stelle an, zu welchen Mifsverständnissen diese Ausgabe Anlafs gegeben hat.

Cantor, *Geschichte der Mathematik* I, p. 349, schreibt dem Menelaos den Satz zu: *„Die Summe der drei Seiten jedes sphärischen Dreiecks ist kleiner als ein gröfster Kreis der Kugel.“* Dieser Satz ist aber ein Zusatz von Maurolycus (I, 7).[67] A. v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I, p. 15 ff. hat nicht wissen können, dafs die Definitionen des *„sphärischen*

67) Denselben Fehler finden wir auch bei R. Wolf, *Geschichte der Astronomie*, p. 118.

Dreiecks und Winkels", die in Maurolycus' Vorrede stehen, hauptsächlich dem Menelaos angehören; v. Braunmühls Beschreibung der Einführung dieser Begriffe ist daher nicht zutreffend. — Den Satz: „*Die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks liegt zwischen zwei und sechs Rechten*", schreibt er dem Menelaos zu; das stimmt aber nur in Bezug auf die erste Hälfte des Satzes. — Die Bemerkung, die Menelaos über eine Menge von Eigenschaften der sphärischen Dreiecke, die den ebenen nicht zukommen, nach v. Braunmühl hinzugefügt haben soll, rührt von Maurolycus her. — Der Satz, der Seite 28 dem Theon beigelegt wird, die erste Formel Seite 62 unten, die dem Ibn-Junos, sowie die Theorie, die Seite 152 ff. dem Maurolycus zu Ehren gerechnet werden, gehören meistens zu der Sphärik des Menelaos und zwar zu den Sätzen III, 11—15 derselben, die Maurolycus weggelassen hat.[68])

Die Sätze dagegen, die Delambre, *l'astronomie ancienne* I, p. 243—45, aus der Sphärik zitiert, sind alle echt, natürlich weil Delambre die Halleyausgabe verwendete.

Man sieht, wie viel Unfug eine schlechte Ausgabe anstiften kann, und mufs bedauern, dafs eben dem Verfasser, dem zuerst die Bedeutung des Menelaos in die Augen gefallen ist, nur diese Ausgabe zur Verfügung stand.

C. Die Mersenneausgabe[69]) (Paris 1644).

Wir sahen, wie Costard in der Vorrede zur Halleyausgabe den Pater Mersenne wegen seiner Menelaosausgabe tadelte. Jedoch verdient Mersenne die Rüge nicht in ihrem ganzen Umfange. Hätte Costard nur die Ausgaben von Mersenne und Maurolycus verglichen, so hätte er gleich gesehen, dafs Mersennes Verbrechen sich darauf beschränkt, dafs er mit anderen griechischen Werken die Vorrede und die Sätze (ohne Beweise) nach der Maurolycusausgabe abdruckt, allerdings (vermutlich wegen Druckfehler) mit Quellenangabe nur zu Menelaos' zweitem Buch.

D. Die sogen. Huntausgabe (Oxford 1707).

In Paulys *Realencyklopädie,*[70]) bei Hoffmann u. a. versiert die Nachricht, dafs Johs. Hunt seiner Theodosiusausgabe (Oxford 1707) hinten Menelaos' *Sphärik* hinzugefügt habe. In vier augenscheinlich ganz voll-

---

68) Vgl. unten Kap. 6, b.

69) *Universae geometriae mixtaeque mathematicae Synopsis,* studio et opere F. M. Mersenni, Parisiis 1644, p. 204—230. 70) Artikel „Menelaus".

ständigen Exemplaren dieser Ausgabe (aus der kgl. Hof- u. Staats-Bibl. zu München, der Bibl. Angelica, Casanatense und der Vatikanbibl. zu Rom) findet sich aber nur der griechische Text von Theodosios und hinten eine lateinische Übersetzung desselben. Die Nachricht über die Huntausgabe gehört also wohl zu den Irrtümern, die, einmal eingebürgert, immer wieder abgeschrieben werden. Es wäre ja auch sehr merkwürdig, wenn Costard 1758 in der Vorrede zur Halleyausgabe eine andere Oxforder Ausgabe von 1707 mit keinem Wort erwähnt hätte, obgleich er die andere frühere Ausgabe nennt.

Ehe ich zum ersten Buch Menelaos übergehe, möchte ich gern eine Bemerkung darüber einschalten, wie viel Vertrauen man überhaupt zu dem durch das Arabische vermittelten Menelaostexte haben kann. Zur Entscheidung dieser Frage haben wir zwei Mittel.

Das erste ist, in den arabischen Codices die Spuren des Griechischen gewissenhaft nachzuforschen. Das ist aber nur die Sache eines schon mit den arabischen Übersetzungen griechischer Mathematiker vertrauten Arabologen.

Das zweite Mittel ist, den überlieferten Text mit eventuellen Zitaten oder Analogen anderer griechischer Verfasser zu vergleichen. In Betracht kommen hier:

1. Ein Vergleich zwischen III, 1 (Satz des Menelaos) nach dem arabischen Texte und den griechischen Redaktionen desselben im Ptolemaios und Theon. Dieser Vergleich hat geringeren Wert, weil dieser Satz, der Hebel aller sphärischen Berechnungen der Griechen, schon im Altertum in vielen verschiedenen Redaktionen vorgekommen sein mag.

2. Ein Vergleich zwischen der arabischen Überlieferung von Menelaos I, 13—14 und dem Referat derselben im Theon. Diesen Vergleich habe ich mit Hülfe der Gerhardschen Übersetzung gemacht.

Menelaos I, 13 (Figur 1—2).

Nach Gerhard.

Cum aequantur duo anguli duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae, et aequantur arcus continentes duos angulos alios utrorumque, scilicet omnis arcus suo relativo, et est unusquisque duorum angulorum reliquorum non rectus;[1]) tunc arcus

1) Einige Handschriften haben statt „non rectus“: „maior aut minor recto“.

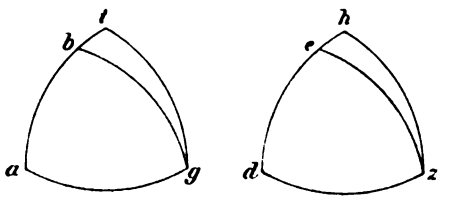
Nach Theon
(Baseler Ausgabe p. 342).

. . . δυνατὸν δέ ἐστιν ἀκριβέστερον ταύτας ἐφοδεύειν, προλαμβανομένων τῶν τοιούτων δύο θεωρημάτων δειχθέντων ἐν τοῖς Μενελάου σφαιρικοῖς.

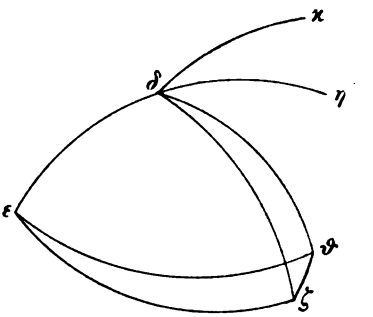
Ἐὰν δύο τρίπλευρα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ

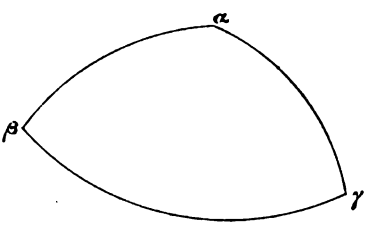
reliquus unius duorum triangulorum est aequalis arcui reliquo alterius, et duo anguli reliqui sunt aequales duobus angulis reliquis, omnis angulus suo relativo.

δὲ λοιπὰς γωνίας ἅμα δυσὶν ὀρθαῖς μὴ ἴσας, καὶ τὰς λοιπὰς πάλιν ἴσας ἀλλήλας (sic!) ἕξει.



Figur 1.





Figur 2.

Der nun folgende Beweis dieses Satzes im Theon und in Gerhards Menelaosübersetzung ist ganz verschieden. Weil jedoch die arabischen Redaktionen in diesem Falle übereinstimmen, wagen wir zu vermuten, daſs Theons Beweis sein eigener ist, oder aber daſs zu Theons Zeit verschiedene Menelaosrezensionen vorlagen, wie es z. B. mit Euklids *φαινόμενα* der Fall[71]) war. Der nächste Satz giebt zum Vergleich besseren Anlaſs.

Menelaos I 14 (Figur 3—4).

Nach Gerhard.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae si aequantur duo anguli unius duobus angulis alterius, unusquisque suo relativo, et duo arcus, super quos sunt anguli aequales, sunt aequales; tunc duo arcus reliqui sunt aequales duobus arcubus reliquis, omnis arcus suo relativo, et reliquus angulus reliquo angulo aequalis.

Nach Theon
(Baseler Ausgabe p. 342).

Ἐὰν δύο τριπλευρα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ τὴν πρὸς ταῖς γωνίαις, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει.

71) Vgl. unten Kap. 5, b.

Cuius exemplum est, ut[1]) sint duo trianguli abg, dez super superficiem sphaerae, et angulus d sit aequalis angulo ā, et angulus z aequalis angulo g, et arcus dz sit aequalis arcui ag. — Dico ergo, quod arcus de est aequalis arcui ab, et arcus ze aequalis arcui gb, et angulus b aequalis angulo e.

Cuius demonstratio haec est. Unusquisque duorum angulorum ā, d aut est rectus aut non rectus.

Sit itaque in primis unusquisque eorum rectus. Et arcus ag est aequalis arcui dz. Si ergo fuerit punctum g polus circuli ab, tunc punctum z iterum erit polus circuli de. Erit ergo arcus gb aequalis arcui ze, et arcus ab aequalis arcui de.

Et iterum non sit punctum g polus circuli ab, neque[2]) z polus circuli ed, et quia angulus ā est rectus, tunc arcus ag est super polos circuli ab; et producam arcum ag usque ad polum circuli ab supra t. Et similiter iterum arcus zd, cum producetur,[3]) transit super polum circuli de; producam ergo ipsum usque ad polum circuli de super h; et protraham duos arcus tb, he duorum circulorum magnorum.

Arcus igitur at est aequalis arcui hd; sed arcus ag est aequalis arcui dz; ergo arcus tg est aequalis arcui hz, et arcus tb aequalis arcui he, et angulus bgt aequalis angulo ezh, et

1) Andere Handschriften haben „Verbi gratia sint duo ... etc.“

Einige Handschriften haben: 2) neque ergo erit, 3) producitur oder productus fuerit.

Ἔστωσαν δύο τρίπλευρα τὰ αβγ δεζ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, τὴν μὲν ὑπὸ αβγ [entspricht ā bei Gerhard] *τῇ ὑπὸ δεζ* [d], *τὴν δὲ ὑπὸ βαγ*[1]) [g] *τῇ ὑπὸ εδζ*[2]) [z], *πλευρὰν δὲ τὴν βγ* [ag] *τῇ εζ* [dz] *ἴσην, λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει.*

ἤτοι γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ αβγ [ā] *δεζ* [d], *ἢ ἐλάττους, ἢ μείζους.*

ἔστωσαν πρότερον ὀρθαί, οἱ ἄρα τῶν αβ [ba] *δε* [ed] *κύκλων πόλοι, ἐπὶ τῶν βγ* [ag] *εζ* [dz] *κύκλων εἰσί. καὶ εἰσὶν αἱ βγ* [ag] *εζ* [dz], *ἤτοι τετραγώνων, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάσσονες. ἔστωσαν πρότερον τετραγώνων. τετραγώνων ἄρα καὶ αἱ γα* [gb] *δζ* [ez], *δύο οὖν αἱ βγ* [ag] *γα* [gb] *δυσὶ ταῖς εζ* [dz] *ζδ* [ze] *ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγα* [agb] *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εζδ* [dze] *ἴση ἐστί, βάσις ἄρα ἡ αβ* [ba] *βάσει τῇ δε* [ed] *ἴση ἐστίν.*

ἔστωσαν δὲ ἐλάττονες τετραγώνων αἱ βγ [ag] *εζ* [dz], *καὶ κείσθωσαν τετραγώνων ἴσαι αἱ βη* [ah] *εϑ* [dt]. *καὶ διὰ τῶν η ā ϑ δ* [h b t e] *μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ηα* [hb] *ϑδ* [te]. *τετραγώνου ἄρα ἑκάτεροι. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ βη* [ah] *εϑ* [dt], *ὧν αἱ βγ* [ag] *εζ* [dz] *ἴσαι, καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ γη* [gh] *ϑζ* [tz] *ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηα* [hb] *δϑ* [et] *ἴσαι. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγη* [bgh]

1) *βαγ* ist in *βγα* zu korrigieren.
2) *εδζ* ist in *εζδ* zu korrigieren.

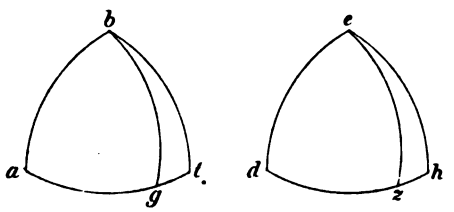
unusquisque duorum angulorum $\overline{tbg}$, $\overline{hez}$ est minor recto, ergo arcus $\overline{bg}$ est aequalis arcui $\overline{ez}$.

Sed arcus $\overline{ga}$ est aequalis arcui $\overline{dz}$, et angulus $\overline{agb}$ aequalis angulo $\overline{dze}$; ergo arcus $\overline{ab}$ est aequalis arcui $\overline{de}$; ergo angulus $\overline{b}$ est aequalis angulo $\overline{e}$. Et illud est, quod declarare voluimus.

Et iterum sit unusquisque duorum angulorum $\overline{a}$, $\overline{d}$ non rectus.

Manifestum est igitur, quod .....

Dem restierenden Teil des Beweises bei Gerhard hat Theon nichts Entsprechendes.

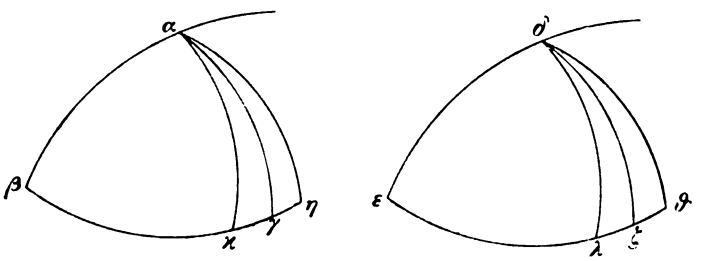


Figur 3.

τῇ ὑπὸ $\overline{δζθ}$ [$\overline{ezt}$] ἴση, διὰ τὸ καὶ τὰς ἐφεξῆς ἴσας εἶναι. δύο δὴ τρίπλευρά εἰσι τὰ $\overline{αγη}$ [$\overline{bgh}$] $\overline{δζθ}$ [$\overline{ezt}$], μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ $\overline{αγη}$ [$\overline{bgh}$] τῇ ὑπὸ $\overline{δζθ}$ [$\overline{ezt}$], περὶ δὲ τὰς ὑπὸ $\overline{γηα}$ [$\overline{ghb}$] $\overline{ζθδ}$ [$\overline{zte}$] τὰς πλευρὰς ἴσας, τὰς δὲ λοιπὰς γωνίας τὰς ὑπὸ $\overline{γαη}$ [$\overline{gbh}$] $\overline{ζδθ}$ [$\overline{zet}$] ἅμα δυσὶν ὀρθαῖς ἀνίσους. διὰ τὸ τὸ (sic!) ὅλας τὰς ὑπὸ $\overline{βαη}$ [$\overline{abh}$] $\overline{εδθ}$ [$\overline{det}$], δύο ὀρθὰς εἶναι. καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἡ $\overline{αγ}$ [$\overline{bg}$] τῇ $\overline{δζ}$ [$\overline{ez}$]. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $\overline{βγ}$ [$\overline{ag}$] τῇ $\overline{εζ}$ [$\overline{dz}$] ἴση. δύο δὴ αἱ $\overline{βγ}$ [$\overline{ag}$] $\overline{γα}$ [$\overline{gb}$] δυσὶ ταῖς $\overline{εζ}$ [$\overline{dz}$] $\overline{ζδ}$ [$\overline{ze}$] ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{βγα}$ [$\overline{agb}$] τῇ ὑπὸ $\overline{εζδ}$ [$\overline{dze}$] ἴση, βάσις ἄρα ἡ $\overline{αβ}$ [$\overline{ba}$] βάσει τῇ $\overline{δε}$ [$\overline{ed}$] ἴση ἐστίν.

ἔστωσαν δὴ πάλιν αἱ $\overline{βγ}$ [$\overline{ag}$] $\overline{εζ}$ [$\overline{dz}$] μείζονες τετραγώνων. καὶ .....

Zu diesem dritten Falle hat Gerhard keinen entsprechenden.



Figur 4.

Während das im Theon Bewiesene mehr umständlich dargestellt ist als das Entsprechende bei Gerhard, ist im Theon überhaupt nur ein Spezialfall bewiesen. Den nur halb vollendeten Beweis schliefst Theon mit folgendem Passus: „ταῦτα δὲ Μενέλαος ἀπέδειξεν ἐν τῷ πρώτῳ τῶν σφαιρικῶν.“

Wir hätten mit Fug eine bessere Übereinstimmung erwarten können, umsomehr, weil wir nach Theons Worten, wenn uns der Text der *Sphärik* sonst nicht bekannt gewesen wäre, keinen Augenblick bezweifelt hätten, daſs Theon die Sätze wörtlich nach Menelaos zitiert. Nun müssen wir doch dies in Abrede stellen. Einen gewissen Trost finden wir darin, daſs Theon auch nicht die sphärischen Beweise des Ptolemaios so genau referiert, wie wir es nach seinen Worten hätten erwarten dürfen.

3. Ein Vergleich zwischen dem arabisch überlieferten Menelaostext und den vier Sätzen aus Menelaos, die Pappos beweist, ist für textkritische Zwecke ohne Wert; denn Pappos giebt offenbar nicht die Sätze wörtlich an, sondern referiert sie möglichst kurz.

Viertes Kapitel.

Menelaos' erstes Buch und Euklids Elemente.

a. Menelaos' Definitionen.

Nach Halley sind die Definitionen, deren Echtheit wir schon festgestellt haben[72]), folgende:

I. *Triangulum Sphaericum est spatium comprehensum sub arcubus circulorum magnorum in superficie Sphaerae.*

II. *Atque hi arcus, qui semper minores sunt semicirculo, dicuntur latera vel crura Trianguli.*

III. *Anguli autem eorum sunt anguli, quos continent circuli magni in superficie Sphaerae.*

IV. *Et hi Anguli aequales dicuntur, quando inclinantur ad invicem plana arcuum eosdem continentium aequali inclinatione.*

V. *Et si duorum arcuum plana inclinentur ad invicem maiori inclinatione quam duorum aliorum arcuum plana inter se, erit angulus ab iisdem arcubus contentus etiam maior.*

VI. *Et si plana arcuum contineant angulum rectum, ipsi arcus etiam dicuntur continere angulum rectum.*

72) Vgl. oben Seite 18.

Menelaos beschränkt sich also auf die Definitionen, die sich auf das sphärische Dreieck beziehen, obwohl er für verschiedene Definitionen aufser den in den Elementen vorkommenden Verwendung hat, so z. B. Kugelpol, Gröfster Kreis, Zirkelpol auf der Kugel, die aber alle in Theodosios' *Sphärik* stehen. Es scheint dies nicht ein Zufall zu sein. Menelaos hat eben nur die von ihm selbst neu erfundenen Begriffe definieren wollen; wie triumphierend hebt er diese und nur diese Definitionen hervor. Er hat eingesehen, wie fruchtbar die in der Aufstellung des Begriffes *„Dreieck auf der Kugel"* enthaltene Abstraktion ist, und hierauf beziehen sich wohl die stolzen Worte seiner Einleitung: *„inveni ego rationem demonstrativam praestantem"*.[73]) Dafs Menelaos unzweifelhaft der Erfinder dieses Begriffes ist, dafür bürgen uns also nicht nur Pappos' Worte: „καλεῖ δὲ τὸ τοιοῦτο σχῆμα Μενέλαος ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τρίπλευρον", und der Umstand, dafs wir diesen Begriff nie vor, dagegen allgemein nach Menelaos verwendet finden, sondern die Definitionen selbst durch ihre Beschränkung.

Wie wir später sehen werden, strebt Menelaos immer, sogar Sätze, die ihrer Natur nach sich nicht auf Dreiecke beziehen, als Dreieckssätze zu formulieren. Deswegen bezweifeln wir auch nicht, dafs *es Menelaos war, der zuerst die Lehre vom sphärischen Dreieck (Kugelgeometrie), wie auch die sphärische Trigonometrie aus der Astronomie und der älteren, ganz stereometrischen Sphärik ausgeschieden hat.* Es dürfte dies das gröfste Verdienst unseres Verfassers sein.

Menelaos fand in Euklids *Elementen* schon das Wort τρίπλευρον (I, def. 6—7), womit Euklid *„eine ebene dreiseitige Figur"* bezeichnet. Das ebene Dreieck nennt Euklid jedoch in der Praxis immer τρίγωνον; also stand das Wort τρίπλευρον zur Verfügung, weil die Anwendung dieses Wortes zur Bezeichnung sphärischer Dreiecke nicht mit Euklids Anwendung kollidiert. — Wenn erst das sphärische Dreieck als von gröfsten Kreisbogen umschlossen definiert ist, überträgt Menelaos die Begriffe πλεύρον (Seite) und γωνίον (Winkel) von der Ebene auf die Kugel. — Um die Gleichheit der sphärischen Winkel zu definieren, mufs er zu Euklid XI, def. 6—7 oder Theodosios I, def. 6, d. h. zu den Definitionen der Raumwinkel Zuflucht nehmen. — In den Definitionen 5 und 6 sucht Menelaos die nämlichen Definitionen des Euklid zu ergänzen.

b. Übersicht des ersten Buches.

Betrachten wir nun die Sätze im ersten Buch, und beginnen wir mit einem Résumé über dieselben nach ihrem Inhalt gruppiert, damit wir gleich einen Überblick gewinnen.

73) Vgl. oben Seite 15.

1. Einen sphärischen Winkel, einem gegebenen gleich, zu konstruieren.

Dieses Problem mufs als ein Hülfssatz betrachtet werden, der nur deswegen mitgenommen wird, weil Menelaos denselben gebraucht, um die drei folgenden Theoreme zu beweisen.

Mit Anwendung moderner Zeichen bezeichnen wir im sphärischen Dreiecke ABC die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten bezw. mit a, b, c und haben nun folgende Satzgruppen:

2. Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich, d. h. wenn $\smile a = b$, wird $\angle A = B$.
3. Umgekehrt, wenn $\angle A = B$, wird $\smile a = b$.
9. Wenn $a > b$, wird $A > B$.
7. Umgekehrt, wenn $A > B$, wird $a > b$.

5. Die Summe zweier Seiten ist gröfser als die dritte, d. h. $a + b > c$.
10. Je nachdem $a + b \gtreqless 180^0$, wird $180 \div A \lesseqgtr B$, und umgekehrt.
11. Die Nebenwinkel eines Dreieckswinkels sind kleiner als die Summe der zwei anderen Dreieckswinkel, d. h. $B + C > 180^0 \div A$, oder aber: Die Winkelsumme des Dreiecks ist gröfser als zwei rechte: $A + B + C > 180^0$.

Diese Sätze geben die Haupteigenschaften des sphärischen Dreiecks. 2, 3, 7 und 9 bilden eine Gruppe; 5, 10 und 11 eine zweite. Letztere behandelt die dreiseitige körperliche Ecke.

In den Sätzen der folgenden Gruppe werden die Stücke zweier sphärischen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ verglichen.

6. Wenn $c = c_1$, $A > A_1$ und $B > B_1$, wird $b + c > b_1 + c_1$.
19. Wenn $c = c_1$, $A > A_1$, $B < B_1$ und $C \geqq 90^0$, $C_1 \geqq 90^0$, wird $a > a_1$ und $b < b_1$.
8. Wenn $b = b_1$, $c = c_1$ und $A > A_1$, wird $a > a_1$,
und umgekehrt, wenn $b = b_1$, $c = c_1$ und $a > a_1$, wird $A > A_1$.
18. Wenn $A = A_1$, $B = B_1$ und $C > C_1$, wird, je nachdem $a + a_1 \gtreqless 180^0$, auch $b_1 \gtreqless b$, und jedenfalls $c > c_1$.

6 und 19 sind Erweiterungen von bezw. 5 und 7. — 18 und 19 stehen mit 4 und 17 in der folgenden Gruppe in enger Verbindung. Diese enthält die Kongruenzsätze.

Menelaos macht keinen Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie. Er beweist ganz einfach, dafs, wenn diese und jene Dreieckselemente gleich sind, werden auch die übrigen gleich. Auf diese Weise gelangt er zu folgenden Kongruenzsätzen:

Zwei sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn:

4 a. zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $b = b_1$ und $C = C_1$;

4 b. alle drei Seiten gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $b = b_1$ und $c = c_1$;

14. eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $B = B_1$ und $C = C_1$;

17. alle drei Winkel gleich sind, d. h. wenn $A = A_1$, $B = B_1$ und $C = C_1$;

12. ein rechter Winkel, die gegenüberliegende Seite und einer der anderen Winkel gleich sind, letzterer jedoch nicht recht, d, h. wenn $A = A_1 = 90^0$, $a = a_1$ und $B = B_1 \gtrless 90^0$;

16. eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und einer der anderen Winkel gleich sind, vorausgesetzt, dafs die Summe der zwei den letzteren Winkeln gegenüberliegenden Seiten nicht 180^0 ist, d. h. wenn $A = A_1$, $a = a_1$, $B = B_1$ und $b + b_1 \gtrless 180$;

13. ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und eine der anderen Seiten gleich sind, vorausgesetzt, dafs die jenen zwei Seiten gegenüberliegenden Winkel beide entweder stumpf oder spitz sind, d. h. wenn $a = a_1$, $A = A_1$, $c = c_1$ und entweder $C > 90^0$ und $C_1 > 90^0$ oder $C < 90^0$ und $C_1 < 90^0$;

15. zwei Seiten und die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, vorausgesetzt, dafs diese Stücke nicht alle recht sind.

Von diesen Sätzen geben 14 und 17 zu keinen Bemerkungen Anlafs. — 12 ist ein spezieller Fall von 16. — In 13 ist ein speziellcr Fall eingeschlossen ($a = a_1$, $c = c_1$ und $A = A_1 = 90^0$), der schon oftmals vor 13 vorausgesetzt wird; dieser Spezialsatz ist nämlich in Theodosios' *Sphärik* bewiesen (II. 11), jedoch nicht als Dreieckstheorem. — In Menelaos 13 ist übrigens ein anderer Spezialfall weggelassen, der nämlich, welcher hervorgeht, wenn die Winkel C und C_1 beide $= 90^0$ sind. Wahrscheinlich haben wir hier die Ursache zur Aufstellung des Satzes 15, wo dann die Kongruenz im erwähnten Spezialfall mitgenommen ist. Dieser überbestimmte Satz 15 mit vier gleichen Elementen ist jedoch nicht notwendig, weil wir für den in 13 vernachlässigten Fall ($C = C_1 = 90^0$, $A = A_1 \gtrless 90^0$) schon durch 12 die Kongruenz beweisen können, und weil, falls sowohl der Winkel C als $A = 90^0$, die Kongruenz nicht existiert, eben was Menelaos in 15 bemerkt.

Vom ersten Buche bleiben uns noch die Sätze 20—35 übrig. Von diesen sind:

21. Wenn $B \geqq 90^0$, $a < 90^0$ u. $c < 90^0$, wird $A < 90^0$ u. $C < 90^0$, und

22. Wenn $A \geqq 90^0$, $a < 90^0$ u. $c < 90^0$, wird $b < 90^0$, $B < 90^0$ u. $C < 90^0$

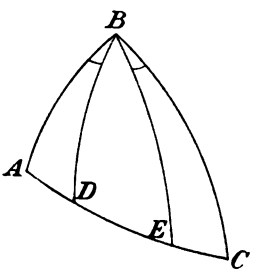
eingeschaltene Hülfssätze.

23. Wenn M die Mitte von a, N von b, wird $MN > \frac{1}{2}c$,

24. Wenn M die Mitte von a, N von c und $B \geqq 90^0$, wird $\angle BMN < C$ und $\angle BNM < A$ und

25. Wenn $A \geqq 90^0$, M, N, P bezw. die Mittelpunkte von a, b, c, wird $\angle MNC < A$ und $MPB < A$

bilden eine Gruppe für sich.



Figur 5.

20. Wenn M die Mitte von a ist, wird $AM \lessgtr \frac{1}{2}a$, je nachdem $A \lessgtr B + C$

ist ein isolierter Satz, der sich zunächst der Gruppe 26—35 anschliefst.[74]) Die Sätze dieser Gruppe, aufser dem Hülfssatz 32, können wir auf folgende Weise zusammenfassen:

Seien (Figur 5) vom Scheitel B die Bogen BD uud BE gezogen, die den Bogen b in D und E treffen, so haben wir:

	Wenn:	So wird:
33, 27.1, 33 coroll.	$a + c \lessgtr 180^0$, $a > c$, $AD = EC$,	$\angle ABD \gtrless EBC$, $BD + BE \lessgtr a + c$,
34, 27.2, 34 coroll.	$a + c \lessgtr 180^0$, $a > c$, $\angle ABD = EBC$,	$AD \lessgtr EC$, $BD + BE \lessgtr a + c$,
35, 28, 35 coroll.	$a + c = BD + BE \lessgtr 180^0$, $a > c$,	$AD \gtrless EC$, $\angle ABD \gtrless EBC$,

Fallen die Punkte D und E in D zusammen, bekommt man Spezialfälle, die im Menelaos doch vor den allgemeinen Fällen bewiesen werden.

	Wenn:	So wird:
29, 26, 29 coroll.	$a + c \lessgtr 180^0$, $a > c$, $AD = DC$,	$\angle ABD \gtrless DBC$, $2BD \lessgtr a + c$,
30, 26, 30 coroll.	$a + c \lessgtr 180^0$, $a > c$, $\angle ABD = DBC$,	$AD \lessgtr DC$, $2BD \lessgtr a + c$,
31, (26), 31 coroll.	$a + c = 2BD \lessgtr 180^0$, $a > c$,	$AD \gtrless DC$, $\angle ABD \gtrless DBC$.[75])

74) Das Corollar zum Satz 20 ist ein Zusatz von Halley.

75) Das Resumé ist hier nicht ganz zutreffend. Etwas von dem, was wir unter 30 aufgeführt haben, ist eigentlich schon in 29 bewiesen. — (26) bedeutet, dafs der Fall (gegeben $\smile a + c = 2BD = 180^0$, $a > c$, zu beweisen: $\smile AD = DC$

Es dreht sich also hier um die drei Elementpaare, die Bogen AD und CE, die Winkel ABD und EBC und die Bogensummen $BD+BE$ und $a+c$. Wenn die Gleichheit eines dieser Elementpaare gegeben ist, wird die Gleichheit oder Ungleichheit der zwei anderen Paare bewiesen, je nachdem $a+c \gtreqless 180^0$, also für drei verschiedene Gattungen sphärischer Dreiecke.

Das Mittel zu den Beweisen für die allgemeinen Fälle leistet der Hülfssatz 32, welcher sagt:

Sei D die Mitte von b und E ein beliebiger Punkt auf BD, und sei ferner $a+c<180^0$ und $a>c$, so kann man beweisen, dafs $\angle BAE > BCE$.

Sollte man den Inhalt dieses ersten Buches charakterisieren, könnte man sagen, dafs das Buch uns die allgemeine Theorie über konvexe dreiseitige Ecken und über die Kongruenz sphärischer Dreiecke giebt nebst einem Anhang solcher Sätze, die wir wohl eher als Übungsbeispiele hinzufügen möchten. Dieser Inhalt überschreitet nirgends, was man in einem modernen Lehrbuch über die elementare Stereometrie zu finden erwartet; dagegen vermissen wir die neuere Lehre von Polardreiecken und die obere Grenze der Winkelsumme (540^0).

Dennoch mufs man bewundern, dafs mit einem Schlag von demselben Manne, der zuerst den Begriff „sphärisches Dreieck" definierte, doch so viel geleistet wird.

In der That würden wir vergebens in der griechischen Geometrie vor Menelaos *eine Folge* von Sätzen suchen, die ganz oder teilweise mit denjenigen bei Menelaos zusammenfallen. Für die Beweise hat Menelaos allerdings vieles von den älteren Arbeiten über Sphärik vorausgesetzt; was dagegen die Theoreme betrifft, so liefert die ebene Geometrie ihm dieselben. Nichtsdestoweniger finden wir hie und da stereometrische oder sphärische Sätze, die mit denjenigen im Menelaos zufälligerweise zusammenfallen.

XI, 20 in Euklids *Elementen* fällt mit Menelaos I, 5 zusammen, während wir im Menelaos keinen Satz finden, der Euklid XI, 21 entspricht. Die Beweise bei Euklid und Menelaos sind ganz verschieden, die Satzformulierung ebenfalls: das Zusammenfallen ist offenbar ein zufälliges. Ohne Zweifel erhält Menelaos seinen Satz I, 5 vom analogen in der Ebene, Euklid I, 20.

Theodosios' *Sphärik* III, 3 ist fast genau derselbe wie Menelaos I, 4a, wie verschieden die Sätze auch formuliert sind. Die Gleichheit geht jedoch

---

und $<ABD = DBC$), den einzigen, den Menelaos vernachlässigt, hier einzufügen ist. Maurolycus fügte den fehlenden Fall als Satz I, 36 in seiner Menelaosausgabe ein.

ganz deutlich hervor, wenn wir den Gebrauch von Theodos. III, 3 in Theodosios' *περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν* II, 10—14 betrachten. Wie wir sehen werden,[76] ist der Satz übrigens schon in Euklids *φαινόμενα* 12 vorausgesetzt.

Theodosios' *Sphärik* II, 11 kann man leicht in Menelaos I, 4a um bilden. Den umgekehrten Satz Theodos. II, 12, Spezialfall von Menelaos I, 13, verwendet Menelaos, wie oben erwähnt, oft.

Diese Zusammenfälle sind ganz sporadisch, und ich finde hierin eine Stütze meiner Annahme, *nicht* dafs das erste Buch Menelaos mit Hülfe des ersten Buches Euklid entstanden ist, denn das kann man überhaupt nicht bezweifeln, sondern dafs Menelaos der erste ist, der diese Übertragung von der Ebene auf die Kugel unternommen.

Ich möchte nun nachweisen, wie und in welchem Umfang Menelaos um die sphärischen Dreieckstheoreme zu erhalten, das erste Buch Euklids gebraucht hat, und zwar in der Voraussetzung, dafs er versuchte, Euklids *Dreieckstheoreme* jedes für sich zu übertragen.

c. Übertragung der Dreieckssätze aus der Ebene auf die Kugel.

Euklid I, 1, ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebenen Seite zu konstruieren, hat keinen entsprechenden Satz bei Menelaos. Dies macht nicht Wunder, wenn man beachtet, dafs eine Reihe von solchen ganz einfachen Konstruktionen von Menelaos ohne Beweis vorausgesetzt werden gerade als ob sie bewiesen wären.[77]) Für diese Konstruktion hat Menelaos übrigens keinen Gebrauch.

Euklid 2 ist kein Dreiecksproblem; folglich berührt Menelaos es nicht

Euklid 3 ist auch kein Dreiecksproblem; Menelaos setzt es aber oft als Satz auf der Kugel ohne Beweis voraus.

Euklid 4, analog Menelaos I, 4a sagt: „*Wenn zwei (ebene) Dreiecke zwei Seiten und den von ihnen gebildeten Winkel gleich haben, werden die Dreiecke gleich.*“ Euklids Beweis läfst sich nicht übertragen, weil er die Deckungsmethode verwendet, die auf der Kugel für symmetrische Dreiecke unverwendbar ist. — Wenn also Menelaos den Deckungsbeweis nicht überträgt, haben wir darin ein Zeugnis dafür, dafs er den Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie auf der Kugel erkannt hat. Eben deswegen sagt er nie (wie mitunter Euklid von ebenen Dreiecken), dass die Dreiecke

---

76) Vgl. unten Kap. 5, b.

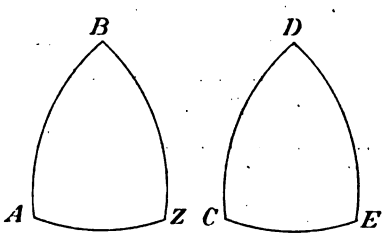
77) Vgl. Euklid, *Elementa* I, 9—15. — Euklid I, 1 trug Maurolycus auf die Kugel über und setzte das so erhaltene Problem als Satz I, 1 in seine Menelaosausgabe ein.

gleich werden, sondern immer: *„wenn diese und jene Stücke gleich sind, dann werden auch die anderen gleich."*

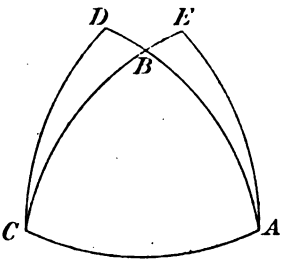
Euklid 5, 6, 8 sind von 4 abhängig und entsprechen bezw. Menelaos 2, 3, 4b, während Euklid 7, der lediglich als Mittel zum Beweise von 8 dient, von Menelaos nicht mitgenommen wird. Also entsprechen Euklid 4—8 den Sätzen Menelaos 2—4; nur die Reihenfolge ist verschieden, weil der Beweis des Hauptsatzes (Euklid 4) nicht übertragbar ist. Für diesen hat Menelaos indessen einen neuen Beweis gefunden und zwar durch die Sätze Theodosios II, 11—12 (vgl. oben), deren Anwendung nahe liegt, weil Theodosios 12 und Euklid 4 fast ganz analog sind. Der Unterschied ist nur, dafs im Theodosios 12 die Winkel am Scheitel recht sind.

Deshalb kann Menelaos die zwei Sätze im Theodosios sehr leicht benutzen, um damit Euklid 4—6 und 8 zu beweisen, nur mufs er wegen der speziellen Annahme bei Theodosios über die Scheitelwinkel die Konstruktion Euklid I, 23 vorausschicken. So erklärt sich folgende Satzfolge und Beweisart im Menelaos:

Menelaos I, 1 = Euklid I, 23: *Auf der Kugeloberfläche einen Winkel zu konstruieren, der einem gegebenen gleich ist* (Figur 6).



Figur 6.



Figur 7.

Seien gegeben $\angle CDE$ und Punkt B; dann zieht man mit D und B als Pole gleiche Kreise CE und AZ. Der Bogen AZ wird gleich EC gemacht. Die Schnittlinien von den Ebenen AB und BZ, sowie die von CD und DE stehen senkrecht bezw. auf den Ebenen der Bogen AZ und CE [Theod. I, 15 und Euklid XI, 19]. Die Winkel jener zwei Paare von Ebenen sind gleich den Bogen CE und AZ [Euklid III, 26]. Die Winkel jener Ebenen sind aber gleich den Winkeln B und D [Euklid XI, def. 6]. Also [def. 4] $\angle B = D$.

Corollar. *Auf derselben Figur wird folglich, wenn* $\smile AZ = CE$, *auch* $\angle B = D$, *und umgekehrt.*

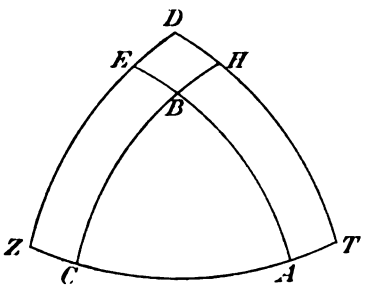
I, 2 = Euklid I, 5 (Figur 7):

Die Winkel an der Basis in einem gleichschenkligen sphärischen Dreieck sind gleich.

Sei gegeben: $\smile AB = BC$.

Zu beweisen: $\angle CAB = BCA$.

Man zieht die Kreise AE und CD bezw. mit den Polen C und A folglich $\angle D = E = 90^0$ [Theod. I, 15]; die Bogendifferenz $DB = BE$ und $\smile CB = BA$ (gegeben), folglich $\smile CI = AE$ [Theod. II, 11]; also $\angle A = C$ [1, corollar].



Figur 8.

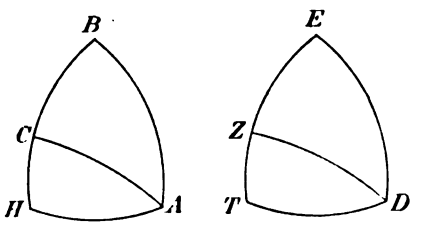
I, 3 = Euklid I, 6 (Figur 8):

Ein sphärisches Dreieck, dessen zwei Winkel gleich sind, ist gleichschenklig.

Sei gegeben: $\angle BAC = BCA$.

Zu beweisen: $\smile AB = BC$.

Man zieht die gröfsten Kreise ZEI und DHT bezw. mit den Polen A und C. Dann wird D der Pol des Bogens CA,[78]) d. h. $\smile ZD = DT$. Ferner $\smile EI = HT$ [1, corollar], und die Bogendifferenz $ED = DH$, und weil $\angle E = I = 90^0$ [Theod. I, 15], wird $\smile EI = BH$ [Theod. II, 11], und die Differenzen $\smile AB = BC$.



Figur 9.

I, 4a = Euklid I, 4 (Figur 9):

Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich sind, wird die dritte Seite auch gleich.

Sei gegeben: $\angle B = E$, $\smile BC = EZ$, $\smile BA = ED$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$.[78a])

Die Bogen HA und DT, mit den Polen B und E gezogen, sind einander gleich (1, corollar), $\angle H = T = 90^0$, die Bogendifferenz $CH = ZT$; dann wird die Gerade $AC = DZ$ [Theod. II, 11], d. h. $\smile AC = DZ$.

I, 4b = Euklid I, 8 (Figur 9):

Wenn zwei sphärische Dreiecke alle drei Seiten gleich haben, werden auch die Winkel gleich.

Der Beweis folgt durch die entgegengesetzten Schlufsfolgerungen des vorigen Beweises [statt Theod. II, 11 wird somit Theod. II, 12 gebraucht].

Wir sehen, wie mit Hülfe des vorhergehenden Problems (Menel. I, 1)

---

78) Hier setzt Menelaos folgenden Satz voraus: *„Die Durchschnittspunkte zweier gröfsten Kreise sind die Pole eines gröfsten Kreises durch ihre Pole."* Dieser Satz findet sich weder in Theodosios' *Sphärik* noch in den älteren astronomischen Werken.

78a) Satz I, 4a ist kein vollständiger Kongruenzsatz; das Fehlende ($\angle A = I$ u. $\angle C = Z$) folgt offenbar durch I, 4b.

seines Corollars und Theodosios II, 11—12 die Sätze 4—6 und 8 aus Euklid mit einfachen und von einander ganz unabhängigen Beweisen versehen worden sind. Hätten aber die Sätze des Theodosios nicht so bequem zur Verfügung gestanden, wäre die Beweismethode ganz anders ausgefallen. Eine Frage stellt sich doch ein: Warum hat Menelaos nicht das Problem I, 23 (Euklid) ohne Beweis vorausgesetzt, so wie er es mit den Euklidischen Problemen zu thun pflegt? Die Antwort ist diese: Weil das Problem bei Euklid von eben dem Kongruenztheorem (Euklid I, 8) abhängig ist, wegen dessen Beweises im Menelaos (I, 4b) es vorausgeschickt ist.

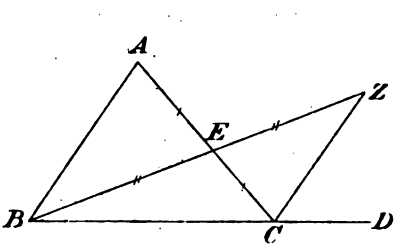
Demnächst Euklid I, 9—15. Dies sind Probleme (9—12) oder Theoreme (13—15), die sich nicht auf Dreiecke beziehen; sie können alle ohne Änderung der Beweisführung auf die Kugel übertragen werden. Obwohl man in den älteren sphärischen Werken von diesen Propositionen keine Spur findet, gebraucht Menelaos sie doch sehr oft ohne jeglichen Beweis. Bei Euklid dienen diese Sätze als Existenzbeweise, und wir müssen die Sache so betrachten, als ob Menelaos die Sätze dem Euklid entliehen, was für ihn hinreichend war, um die Existenz auf der Kugel zu sichern. Als Beispiel des gelegentlichen Gebrauches dieser Sätze mögen aus der Halleyausgabe folgende Stellen zitiert sein:

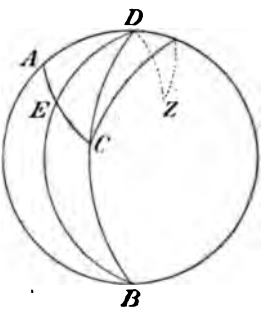
	vorausgesetzt im Menelaos:		
Euklid I:	Satz:	Seite:	Zeile:
9	I, 30	36	16 von unten
10	I, 24	29	21 von oben
11	I, 22	27	16 von oben
	II, 2	49	5 von unten
12	I, 32	41	11 von oben
		42	4 von oben
13	I, 11	11	20 von oben
15	I, 12	12	8 von oben.

Eine andere Konstruktion, die Menelaos oftmals ohne Beweis vorausgesetzt (z. B. Halleyausgabe II, 1. 2. 4 u. III, 7 Seite 92 Zeile 14—15 ff.), ist diese: *„Auf der Kugeloberfläche von einem gegebenen Punkt aufserhalb eines gegebenen Bogens einen Bogen zu ziehen, der mit dem gegebenen einen gegebenen Winkel bildet."* Die entsprechende Konstruktion in der Ebene finden wir nicht in Euklids *Elementen;* sie ist aber in den *Daten* (Satz 30) von demselben Verfasser vorausgesetzt.

Betrachten wir ferner Euklid I, 16: *In jedem Dreieck, wo die eine Seite verlängert ist, wird der dadurch entstandene Aufsenwinkel gröfser als jeder einzelne der gegenüberliegenden Innenwinkel."*

Indem Menelaos es versucht, den Beweis dieses Satzes zu übertragen, stöfst er (Figur 10) auf die Ungleichheit: $\angle ECD > ECZ$. Auf der Kugel gilt dies aber nur, wenn $\smile BE < 90^0$; denn nur dann wird $\angle ECZ$ ein Teil von $\angle ECD$ (Euklid, *κοιναὶ ἔννοιαι* 8). Der Satz läfst sich also nur mit verändertem Resultate übertragen. In dem Spezialfall, dafs das Dreieck





Figur 10.

gleichschenklig ist, $\smile AB = AC = 90^0$, sieht man aber sofort, dafs der Aufsenwinkel $180^0 \div C = B = 90^0$ wird. Wenn man die Figur auf der Kugel derjenigen in der Ebene analog ergänzt, erhält man offenbar das sphärische Zweieck. So kommt man auf ganz natürliche Weise zur Bildung des Zweiecks und zur Zerteilung des Problems in mehrere Fälle mit einem Grenzfall, wo $180^0 \div C = B$. Durch Figurenbetrachtung erhält man nun $\smile AC = AD$, wenn $\smile AB + AC = 180^0$, und umgekehrt, und ferner mit Benutzung des Satzes Menelaos I, 2, indem ja $\angle B = D$, dafs die Bedingung für $\angle 180^0 \div C = B$ eben $\smile AB + AC = 180^0$ wird. Wenn aber $\smile AB + AC \gtrless 180^0$, wird $\smile AC \gtrless AD$, und man braucht nur, um die zwei allgemeinen Fälle zu erhalten, den Satz Euklid I, 18: *„Einer gröfseren Seite gegenüber liegt ein gröfserer Winkel,“* zu übertragen; dann folgt ja, dafs $180^0 \div C \lessgtr B$, je nachdem $\smile AB + AC \gtrless 180^0$. Erst mufs aber Euklid I, 18 für das sphärische Dreieck bewiesen werden. In der Ebene hängt dieser Satz von Euklid I, 16 ab, bei dessen Übertragung wir gerade verweilten. Deshalb wird Menelaos gezwungen, einen neuen Beweis für Euklid I, 18 zu suchen.

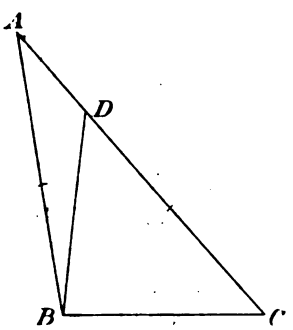
Er legt (Figur 11) nun die kleinere Seite AB auf die gröfsere AC, jedoch von C und nicht wie Euklid von A aus; dann wird: $AC = AB + AD > BD$ (Euklid I, 20), und wenn er Euklid I, 25 in Bezug auf die Dreiecke ABC und DCB, die zwei Seiten gleich, die dritte aber ungleich haben, in Anwendung bringt, folgt $\angle B > C$, und somit ist der neue

Beweis erledigt, allerdings mit Hülfe der noch nicht übertragenen Sätze Euklid I, 20 und 25.

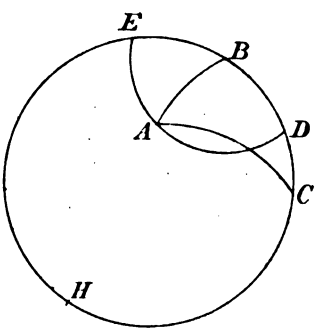
Indem nun Euklid I, 21 eine direkte Folge oder Erweiterung von 20 ist, und 24 und 19 die umgekehrten von 25 und 18 sind, stellt sich folgende Ordnung bei Menelaos als die natürliche dar:

Menelaos:		Euklid:	
5	analog	20	
6	„	21	
8a	„	24	invers
8b	„	25	
9	„	18	invers
7	„	19	
10	„	16.	

Sonderbar ist es allerdings, dafs 8 (Menelaos) zwischen die inversen Sätze 7 und 9 eingeschaltet ist. Dies erklärt sich vielleicht dadurch, dafs



Figur 11.



Figur 12.

Satz 7 im Menelaos durch 5 auf eine ähnliche Weise wie 6 bewiesen wird. Jedenfalls haben die Sätze Menelaos 5—10 folgende Ordnung:

Menelaos I, 5 = Euklid I, 20 (Figur 12):

In einem sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte.

Seien gegeben: $\smile BC > BA$ und $\smile BC > AC$.

Zu beweisen: $\smile BA + AC > BC$.

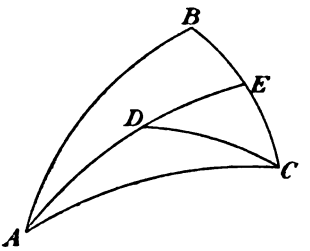
Man zieht den Kreis EAD mit B als Pol, also $\smile CA > CD$ [Theod. III, 1]; man addiert $\smile BA = BD$, und erhält $\smile BA + AC > BC$.[79])

79) Durch Verlängerung der Bogen AB und AC bis zum Schnitt in dem A entgegengesetzten Pol H wird man beweisen können, dafs die Summe der Seiten jedes sphärischen Dreiecks kleiner ist als ein gröfster Kreis der Kugel; vgl. oben Seite 20.

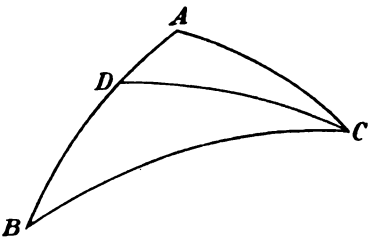
I, 6 = Euklid I, 19 (Figur 13):

Durch 5 erhält man:

$$\smile AB + BC > AE + EC > AD + DC.$$



Figur 13.



Figur 14.

I, 7 = Euklid I, 19 (Figur 14):

In jedem sphärischen Dreieck liegt eine gröfsere Seite einem gegebenen gröfseren Winkel gegenüber.

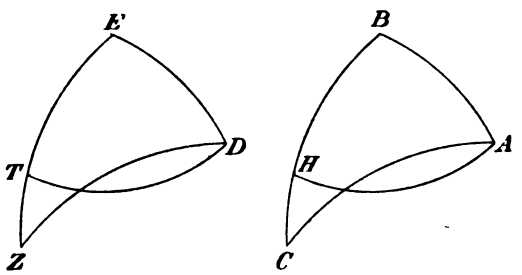
Sei gegeben: $\angle C > B$.

Zu beweisen: $\smile AB > AC$.

Sei $\angle BCD = B$ konstruiert (1), so wird $\smile BD = DC$ (3), folglich $\smile AB = AD + DC > AC$ (5).

I, 8 = Euklid I, 24—25 (Figur 15):

In zwei sphärischen Dreiecken, die zwei Seiten gleich haben, wird eine dritte gröfsere Seite durch einen gegenüberliegenden gröfseren Winkel bedingt



Figur 15.

a. Sei gegeben: $\smile AB = DE$, $BC = EZ$ und $\angle B > E$.

Zu beweisen: $\smile AC > DZ$.

Seien gezogen die Kreise TD und HA mit E und B als Pole; dann wird die Bogendifferenz $TZ = HC$. Dagegen $\smile DT < AH$, weil $\angle B > E$ (def. 5 und prop. 1). Dann wird aber die Gerade und also auch der Bogen $AC > DZ$ [Theod. III, 1].

b. Sei gegeben: $\smile AB = DE$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AC > DZ$.

Zu beweisen: $\angle B > E$.

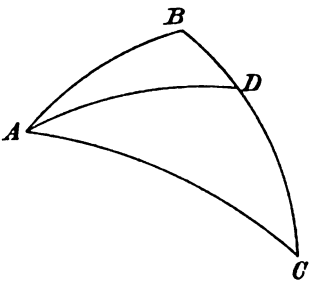
Dies wird durch die umgekehrte Schlufsreihe von **a.** bewiesen (vgl. Seite 45).

Anm. Vor dem Beweise 8a steht im Cod. Leid. 399, bei Gerhard und Halley, dafs der Beweis dieses Satzes sowie der des umgekehrten 8b wie in der

Ebene geführt werden kann. Wenn diese Bemerkung nicht eine spätere Interpolation ist, was nicht wahrscheinlich ist, liefert sie uns den direkten Beweis der Übertragung von Euklids Sätzen auf die Kugel.

I, 9 (invers von 7) = Euklid I, 18 (Figur 16):

In jedem sphärischen Dreieck liegt ein gröfserer Winkel einer gegebenen gröfseren Seite gegenüber.



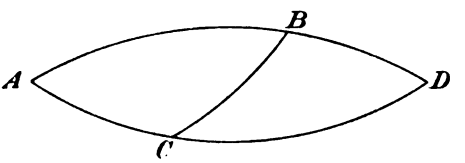
Figur 16.

Sei gegeben: $\smile BC > BA$.

Zu beweisen: $\angle A > C$.

Mache $\smile CD = AB$, dann wird $\smile BC = AB + BD > AD$ (5), und mit Anwendung von 8 auf die Dreiecke ACD und CAB wird bewiesen $\angle A > C$.

I, 10 = Euklid I, 16 (Figur 17):



Figur 17.

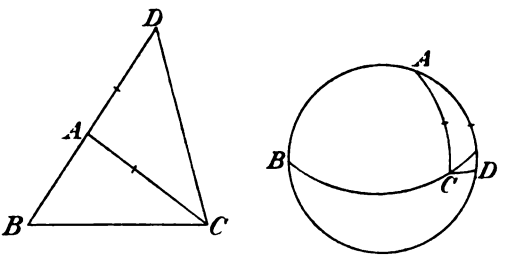
Ein Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks ist $\lessgtr$ *als der Innenwinkel am anderen Endpunkte der verlängerten Seite, je nachdem die Summe der zwei anderen Seite* $\gtrless$ *als* 180^0 *ist, und umgekehrt.*

Sei gegeben: $\smile AB + BC \gtrless 180^0$.

Zu beweisen: $\angle 180^0 \div C \lessgtr A$.

Indem D der dem Pol A entgegengesetzte Pol ist, wird $\smile AB + BC \gtrless AD = 180^0$ [Theod. I, 11], d. h. $\smile BC \gtrless BD$, wodurch $\angle BCD = 180^0 \div C \lessgtr D = A$ (9 und 2). Der umgekehrte Satz wird ohne Beweis postuliert.

Wie man sieht, ist Menelaos I, 5 nicht wie der analoge Satz I, 20 im Euklid bewiesen. Es kommt daher, dafs Menelaos beim Übertragen des Beweises aus der Ebene, in dem Falle wo $\smile BA + AC > 180^0$, auf ein Dreieck BCD stöfst (Figur 18), das nach seiner Definition kein sphärisches Dreieck ist; jedenfalls wird in den Definitionen in der Halleyausgabe ausdrücklich vorausgesetzt, dafs die Seiten des sphärischen Dreiecks kleiner als der Halbkreis sein sollen.



Figur 18.

Menelaos I, 6 dagegen ist durch 5 bewiesen, ganz wie der analoge Euklid I, 21 durch 20.

Für 7 (Euklid 19) hat Menelaos den Euklidischen Beweis gebrauchen, d. h. die Sätze 2 (Euklid 5) und 9 (von 7 unabhängig) zum Aufbau eines antithetischen Beweises benutzen können. Nichtsdestoweniger giebt er einen neuen Beweis durch 3 (Euklid 6) und 5 (Euklid 20). Für Menelaos, der ja doch gezwungen war, Euklid 20 so früh zu beweisen, wird der Beweis durch diesen einfacher. Hier wie immer, wo die Beweismittel der Übertragung wegen sich für Menelaos anders stellen, giebt er gern neue einfachere Beweise; die antithetischen vermeidet er immer.

Bis jetzt haben wir die Sätze Euklid I, 1—16, 18—21 und 23—2 mit Menelaos parallelisiert. 17 und 22 haben wir übergangen.

Euklid I, 17: *„In jedem (ebenen) Dreieck ist die Summe von irgen zwei Winkeln kleiner als 180°"* folgt direkt aus Euklid 16, dem Satz über den Aufsenwinkel, der, auf die Kugel übertragen (Menelaos I, 10) drei Fälle giebt. Deshalb läfst sich 17 nicht übertragen; er gilt nicht au der Kugel.

Euklid I, 22: *„Ein Dreieck von drei gegebenen Seiten zu konstruieren* ist übertragbar, wenigstens wenn die Seiten (Bogen) gewisse Bedingunge erfüllen. Konstruktionen wie diese setzt Menelaos (vgl. oben) ohne Be weis voraus. Gerade diese braucht er aber nirgends.

Wir kommen nun zu Euklid I, 26. Seine verschiedenen Teile ent sprechen den Sätzen 12, 14 und 16 im Menelaos. Dieser hat also seine Satz 11 eingeschaltet, dem wieder Euklid 32 entspricht.

Euklid I, 32 ist der Hauptsatz über Dreiecke: *„Ein Aufsenwinkel i der Summe der zwei gegenüberliegenden Innenwinkel gleich."* Ein Versuch den Beweis des Euklid zu übertragen, würde zu dem Beweise führen, da auf der Kugel der Aufsenwinkel kleiner als die Summe der Innenwinkel se Der Beweis aber, weil er im Euklid mit Hülfe der Parallelentheorie geführ wird, würde hier stereometrisch und nicht sphärisch werden, und eine Unter suchung über die von gröfsten und parallelen Kreisen gebildeten Dreieck erfordern. Dies hat für Menelaos keinen Zweck. Er findet leicht eine Beweis auf der Kugeloberfläche, denn der Inhalt des Satzes bindet denselbe auf der Kugel ganz naturgemäfs an den ähnlichen Satz 10, mit dessen Hülf er leicht bewiesen wird. Somit haben wir:

Menelaos I, 11 = Euklid I, 32 (Figur 19):

In jedem sphärischen Dreieck ist:

$\angle 180^0 \therefore C < A + B$, *oder aber* $\angle A + B + C > 180^0$.

Sei nämlich D der dem Pol A entgegengesetzte Pol, so erhält man $\angle A =$ $= DCE$ (1), ferner $\smile ED = EC$ (2) oder $\smile BE + EC < 180^0$. Zur Ur

gleichheit $\angle BCE < B$ (10) addiert man $\angle A$, wodurch $\angle BCE + A = BCE + DCE = 180^0 \div C < A + B$. Ferner durch Addition von $\angle C$ erhält man:

$$180^0 < A + B + C.^{80})$$

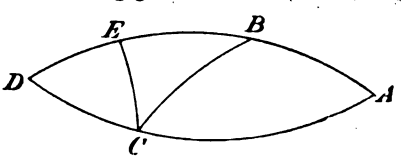
Euklid I, 26 ist in zwei Teile geteilt:

a. *Zwei Dreiecke, die eine Seite und die dieser anliegenden Winkel gleich haben, sind gleich.*

Dieser Satz mit Beweis kann auf die Kugel übertragen werden. Der analoge sphärische Satz im Menelaos (I, 14) ist jedoch auf eine andere, und zwar eine schwierigere Weise durch die eingeschalteten Sätze 12—13 bewiesen.

b. *Zwei Dreiecke, die einen Winkel, die gegenüberliegende Seite und noch einen Winkel gleich haben, sind gleich,*

entspricht Menelaos I, 16 mit 12 als Spezialfall. Der Euklidische Beweis kann nicht übertragen werden wegen seiner Abhängigkeit von Euklid I, 16, der auf der Kugel drei Fälle hatte. Einen neuen Beweis erhält Menelaos durch den 26a entsprechenden Satz (Menelaos I, 14). Der Spezialfall 12 ist aber offenbar aufgestellt wegen des Beweises von 13. Mit Anwendung von 12 und 13 zum Beweis von 14 wird die Ordnung der Sätze 12—16 ganz natürlich; es wäre aber leichter gewesen, mit 14 (wie im Euklid bewiesen) zu beginnen, dann 16, der nur von 14 abhängig ist, und zuletzt 12, 13, 15 folgen zu lassen. Wie dem auch sei, die schwierigere Methode steht da, und wir werden aus diesem und anderen Gründen gezwungen zuzugeben, dafs Menelaos von der Kongruenztheorie aus freier gearbeitet hat. Ihm ist diese Theorie das Ziel, dem Euklid dagegen nur ein Mittel; im Gegensatz zu Euklid hat er dann diese Theorie erschöpfend behandelt, wie es übrigens seine Gewohnheit ist (vgl. die Sätze I, 26—35). Gelegentlich bemerken wir, dafs Menelaos sich bemüht, die inversen Sätze mitzunehmen und die Dualitätsfälle aufzustellen (I, 17—18). In dieser Beziehung kontrastiert er mit Euklid, von dem es oft genug hervorgehoben worden ist, dafs er alles Überflüssige vermeidet. Der Unterschied der Ziele und der Entwickelungsstandpunkt der Mathematik zur Zeit der zwei Verfasser machen aber, dafs man sagen kann, beide seien in ihrem guten Rechte.



Figur 19.

Von Euklid 26 aus arbeitet Menelaos nur gelegentlich unter Euklids Einfluſs. Auch würde er nunmehr in den *Elementen* nur sehr wenig Sätze

80) Hier schaltet Maurolycus seinen Beweis, dafs $\angle A + B + C < 540^0$ ist, ein; vgl. oben Seite 31. I, 11 ist in Gerhards Übersetzung verstümmelt oder mifsverstanden. Ich folge deswegen der Halleyausgabe.

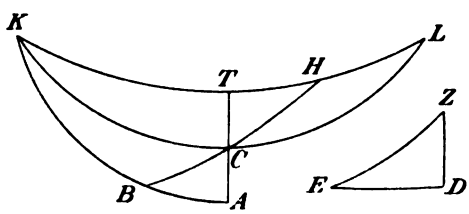
finden, die zur Übertragung geeignet wären. Weder die Theorie der Parallele und der Parallelogramme im 1. und 2., noch die Kreistheorie im 3. und 4., noch die Ähnlichkeitstheorie im 6. Buche sind zur Bildung sphärischer Dreieckssätze geeignet. Nachdem also Menelaos nach Euklid die sphärischen Fundamentalsätze gebildet, sucht er seine weiteren Sätze hie und da in der Geometrie der Ebene, oder er findet sie selbst. Was in jedem einzelnen Falle stattgefunden hat, läfst sich natürlich nicht leicht entscheiden. Bevor wir diese einzelnen Fälle von Abhängigkeit nachzuweisen versuchen, geben wir ein Résumé über die Kongruenzsätze.

Menelaos I, 12.

Sei gegeben: $\angle A = D = 90^0$, $\angle C = Z \leqslant 90^0$, $\smile BC = EZ$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$, $\smile AB = DE$, $\angle B = E$.

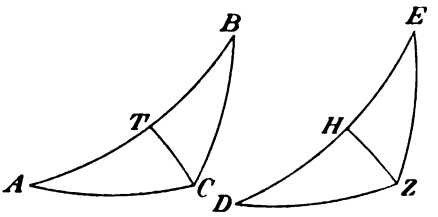
Sei (Figur 20) $\smile CH = BC$, $\smile CT = DZ$, so wird $\triangle CHT \cong ZED$ (4), d. h. $\angle THC = E$, $\angle HTC = D = 90^0$ und $\smile HT = ED$. Da $\smile KT$ und KA beide senkrecht auf TA stehen, ist K Pol für TA [Theod. I, 13]. Also $\triangle KBC \cong LHC$ (4), ferner die Bogendifferenz $AB = HT = DE$, und $\angle B = THC = E$, und da $\triangle HCT \cong BCA$ (4), wird $\smile AC = CT = DZ$.



Figur 20.

I, 13 (Figur 21):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\smile BC = EZ$, $\smile AC = DZ$ und entweder $\angle B < 90^0$, $\angle E < 90^0$ oder $\angle B > 90^0$, $\angle E > 90^0$.



Figur 21.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\angle C = Z$, $\angle B = E$.

a. $\angle A = D \leqslant 90^0$. Seien $\smile CT$ und HZ senkrecht auf $\smile AB$ und DZ getällt, so wird $\triangle ACT \cong DZH$ (12), d. h. $\smile CT = HZ$, dadurch $\smile BT = HE$ [Theod. II, 11] und addiert man $\smile AT = DH$, so wird $\smile AB = DE$. Dann folgt $\angle C = Z$ und $\angle B = E$ (4).

b. $\angle A = D = 90^0$. In diesem Falle kann man den letzten Teil des Beweises **a** von „$\smile CT = HZ$“ aus benutzen.

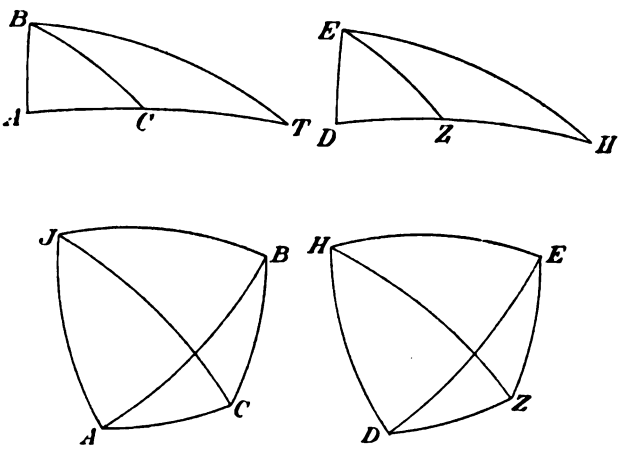
I, 14 = Euklid I, 26, 1 (Figur 22):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile AC = DZ$.

Zu beweisen: $\angle B = E$, $\smile AB = ED$, $\smile BC = EZ$.

a. $\angle A = D = 90^0$, *C und Z Pole für bezw. AB und ED.* Dann wird $\smile BC = EZ = 90^0$ und die betreffenden Dreiecke werden kongruent (4).

b. $\angle A = D = 90^0$, *C und Z nicht Pole für AB und ED.* Dann sind z. B. T und H diese Pole, so wird $\triangle CBT \cong ZEH$ (13), denn $\smile CT = ZH$ (gleiche Bogendifferenzen), $\smile BT = EH = 90^0$, $\angle BCT = EZH$ (sie haben gleiche Supplementwinkel) und $\angle B$ u. $E < 90^0$. Weil also $\smile BC = EZ$, hat man $\triangle ABC \cong DEZ$ (4 oder 12).



Figur 22.

c. $\angle A = D \gtrless 90^0$. Seien J und H Pole bezw. für AB und ED, so wird $\angle JAC = HDZ$, $\triangle JAC \cong HDZ$ (4), d. h. $\smile JC = HZ$, $\angle JCB = HZE$, woraus, da $\angle JBC$ und HEZ beide entweder spitz oder stumpf sind, folgt $\triangle JBC \cong HEZ$ (13), d. h. $\smile BC = EZ$, also $\triangle ABC \cong DEZ$ (4).

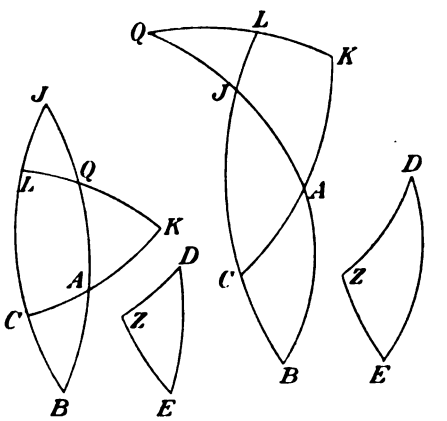
I, 15 (Figur 23):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AB = DE \gtrless 90^0$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$.

a. $\smile AB = DE < 90^0$.

b. $\smile AB = DE > 90^0$.



Figur 23.

Sei J der dem Punkte B entgegengesetzte Kugelpol, und $\smile AK = DZ$, $\smile AQ = DE$, dann wird a. u. b. $\smile DE \lessgtr AJ$, ferner $\triangle AKQ \cong DZE$ (4), also: $\smile KQ = ZE = BC$, $\angle K = Z = C$, woraus (da (13) für den Fall $\angle A = D = 90^0$ unbrauchbar ist):

$$\smile KL + LC = 180^0 = \smile BCJ. \qquad (10)$$

a. subtrahiert man $\smile LC$, b. subtrahiert man $\smile JC$, so erhält man:

$$\smile BC + LJ = KL, \qquad \smile BC = KL + LJ,$$

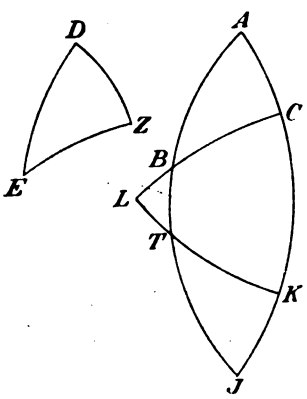
und weil $\smile BC = KQ$, wird $\smile LQ = LJ$ und $\angle Q = J = B$, d. h. $\triangle AKQ \cong ACB$ (4), oder $\smile AC = AK = DZ$.

I, 16 = Euklid I, 26, 2 (Figur 24):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AB + DE \gtrless 180^0$.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\smile AC = DZ$, $\angle B = E$.

Sei J der dem Punkte A entgegengesetzte Kugelpol, $\smile JT = DE$ und $\smile JK = DZ$, dann wird, da $\angle D = J$, $\triangle DEZ \cong \triangle JTK$ (4), oder $\angle TKJ = EZD$, woraus $\smile CL = LK$ (3), $\smile TK = EZ = BC$, also die Differenzen $\smile LB = LT$, $\angle B = T$, d. h. $\triangle ABC \cong JTK \cong DEZ$ (14).



Figur 24.

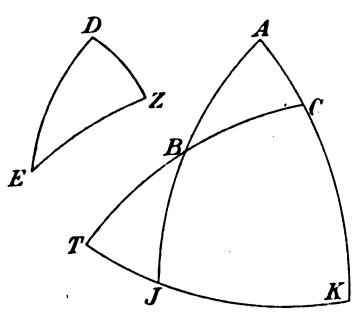
I, 17 (Figur 25), ungültig in der Ebene.

Seien gegeben: $\angle A = D$, $\angle B = E$, $\angle C = Z$.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\smile AC = DZ$, $\smile BC = EZ$.

Seien $\smile BT = ZE$ und $BJ = ED$; dann wird $\triangle DEZ \cong JBT$ (4), d. h. $\angle J = D = A$, $\angle T = Z = C$ und $\smile TJ = ZD$. Da nun $\angle C$ (als Aufsenwinkel des Dreiecks CTK) $= CTK$, hat man $\smile CK + KT = 180^0$ (10) und analog $\smile JK + KA = 180^0$; da also $\smile KA \div CK = KT \div JK$, bekommt man $\smile AC = TJ = ZD$ und ferner $\triangle ABC \cong DEZ$ (14).

Zu dem 13. Theorem des Menelaos finden wir bei Euklid keinen entsprechenden Satz; man kann ihn jedoch mit dem analogen Ähnlichkeitssatz in der Ebene VI, 7 vergleichen. Dieser zeigt uns die Methode, die Euklid wahrscheinlich verwendet hätte, um Menelaos I, 13 in der Ebene zu beweisen. Er würde sicher Euklid I, 17 und 32 gebraucht haben. Diese gelten nicht auf der Kugel, sodafs Menelaos aus Euklid VI, 7 jedenfalls keinen Beweis für Menelaos I, 13 hat ableiten können.



Figur 25.

Die beiden folgenden Sätze, Menelaos I, 18 und 19, stehen wie I, 8 in enger Verbindung mit der Kongruenztheorie. Sie sagen nämlich: wenn diese und jene Stücke zweier Dreiecke gleich sind, diese und jene ungleich, so werden

auch diese und jene ungleich. I, 18 (vgl. das Résumé oben Seite 28) mit einem langen dreiteiligen Beweis knüpft sich dualistisch an 17, hat aber kein Analogon in der Ebene.

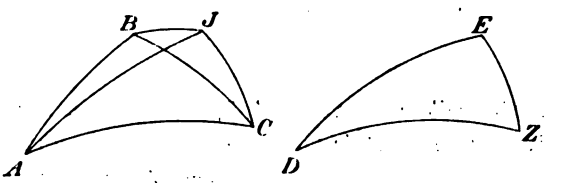
I, 19 (Figur 26):

Gegeben: $\smile AC = DZ$, $\angle A > D$, $\angle C < Z$ und $\angle B \geqq 90^0$, $\angle E \geqq 90^0$.

Zu beweisen: $\smile BC > EZ$, $DE > AB$.

Sei konstruiert $\triangle AJC \cong DEZ$. Weil nun die Winkel CBJ und AJB spitz sind, wird $\angle ABJ > AJB$, folglich $\smile \boldsymbol{AB < AJ = DE}$ (7); durch denselben Schluſs $\angle BJC > CBJ$ und $\smile \boldsymbol{BC > CJ = ZE}$.

Trotz unermüdlichen Suchens in den Werken von Euklid, Archimedes, Apollonios, Pappos u. a. ist es mir nicht gelungen, den analogen Satz in der Ebene zu finden. Der Satz, eine direkte Folge von Euklid I, 19 (Menelaos I, 7), ist somit wahrscheinlich eine Erfindung von Menelaos. Für Sätze dieser Art hatte er offenbar eine besondere Vorliebe. Ein Theorem derselben Art war es, welches nach Proklos' Bericht von ihm anders als von Euklid bewiesen wurde, nämlich Euklid I, 25 = Menelaos I, 8b. Jedoch ist der Beweis, den Menelaos für diesen Satz in der *Sphärik* gab, nicht derselbe, den er nach Proklos in der Ebene aufstellte, wie ein Vergleich zeigen wird.



Figur 26.

Sei nämlich gegeben: $\smile AB = DE$, $AC = DZ$, $BC > EZ$, so wird es auf folgende Weise bewiesen, daſs $\angle A > D$:

Euklids Elemente I, 25 (Fig. 27).

Wäre $\angle A = D$, so wäre auch $BC = EZ$ [Eukl. I, 4 = Menel. I, 4a], was unmöglich ist. Wäre $\angle A < D$, so wäre auch $BC < EZ$ [Eukl. I, 24 = Menel. I, 8a], was unmöglich ist. Also $\angle \boldsymbol{A > D}$.

Menelaos nach Proklos (Figur 28).

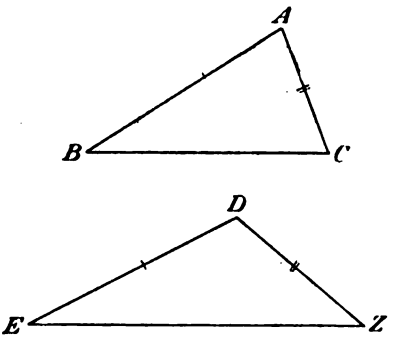
Sei $BH = EZ$, $\angle HBT = E$ [Eukl. I, 23 = Menel. I, 1] und $BT = DE$, so wird $\triangle EDZ \cong BTH$ [Eukl. I, 4 = Menel. I, 4a], d. h. $HT = AC = DZ$, also $TK > AC > AK$, d. h. $\angle KAT > KTA$ [Eukl. I, 19 = Menel. I, 7]; addiert man $\angle BAT = BTA$ [Eukl. I, 5 = Menel. I, 2], hat man $\angle \boldsymbol{A > BTK = D}$.

Menelaos' Sphärik I, 8b (Figur 29).

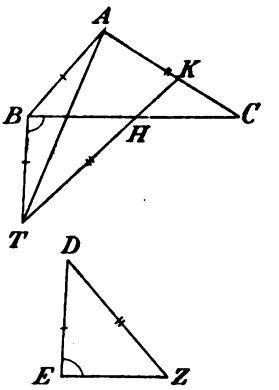
Ziehe die Kreise HC und ZT mit bezw. A und D als Pole, so wird $\smile HB = ET$, und weil $\smile CB > EZ$, wird $\smile CH > ZT$ [Theod. III, 1], d. h. $\angle \boldsymbol{A > D}$.

Anm. Theod. III, 1 ist durch Euklid I, 47 u. III, 7 bewiesen. Letzterer ist von Euklid I, 20 = Menel. I, 5 abhängig.

Euklid beweist also den Satz antithetisch durch den vorhergehenden (I, 24), letzteren durch I, 4, 5, 19, 23. Was Menelaos gethan, ist lediglich, dafs er I, 25 mit einem dem des Satzes 24 analogen Beweise versehen hat,

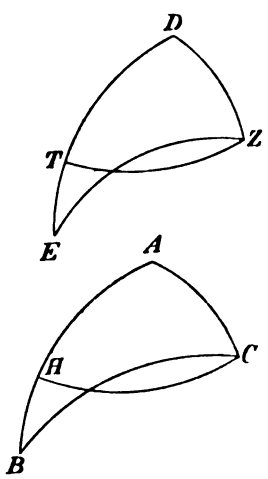


Figur 27.



Figur 28.

wieder mit Hülfe von I, 4, 5, 19, 23. Den neuen Beweis hat er also kaum durch seine sphärischen Untersuchungen gefunden; in der *Sphärik* giebt er ja dem kürzeren direkten Beweis durch den oft benutzten Theodosios III, 1 den Vorzug. Vielmehr gehört der von Proklos referierte Beweis einem Werk von Menelaos über die Geometrie der Ebene an, das als ein Ergänzungsbuch zu den *Elementen* gedacht war, und wo namentlich oder ausschliefslich Dreieckstheoreme sich befanden, ein *Buch der Dreiecke*, wie es die Araber dem Menelaos beilegen. Dafs Proklos' Bericht falsch ist, ist an sich unwahrscheinlich, umsomehr, weil man von der *Sphärik* weifs, dafs Menelaos immer die antithetischen Beweise vermeidet und analoge Sätze analog beweist, wie die Beispiele Menel. I, 4a u. b, 2 u. 3, 8a u. b, 7 u. 9 zeigen. Jedenfalls, wenn irgend jemand, beeinflufst von den wenigen Fällen übereinstimmender Beweise im Euklid und Menelaos, vielleicht die intime Verwandtschaft der beiden Werke bezweifeln möchte, so kann er diesen Zweifel Proklos' Bericht gegenüber nicht gut aufrecht halten. — Gelegentlich bemerken wir, dafs es an sich interessant ist, zu wissen, dafs man schon zu Menelaos' Zeit die *Elemente* kritisierte und ergänzte.



Figur 29.

Der letzte Teil vom 1. Buch Euklids gab, sagten wir, zur Übertragung keinen Anlafs. Nichtsdestoweniger können die Parallelentheoreme in der Ebene

sphärische Sätze ergeben, wenn wir überall für *„parallele Gerade"* *„parallelen Kreis"* und für *„schiefe Gerade"* *„gröfsten Kreis"* substituieren. Als Beispiel nennen wir Euklid I, 33, 1 und Theodosios II, 13, 2. Das Beispiel steht ganz isoliert, und Sätze, die man durch diese Art von Übertragung erhalten kann, fallen so in die Augen, dafs sie durch Übertragung aus der Ebene nicht entstanden zu sein brauchen.

Vom 3. Buch Euklids, welches die Kreise in der Ebene und die bei ihnen vorkommenden Winkel behandelt, können die meisten Sätze übertragen werden, indem man die Begriffe *„sphärisches Zentrum"* und *„sphärischen Abstand"* einführt [81]) und dann folgende Substitutionen macht:

„Kreis auf der Kugel" für *„Kreis in der Ebene"*,
„Zirkelpol" für *„Kreiszentrum"*,
„gröfster Kreis" für *„Gerade"*.

Die so erhaltenen Theoreme sind der Art, wie wir sie im Theodosios und überhaupt in den Sphäriken vor Menelaos treffen. Folgende Beispiele dieser Art von Korrespondenz springen namentlich in die Augen.

Euklid III, 11.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

III, 12.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Theodosios' Sphärik II, 4.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πολῶν αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τῆς συναφῆς αὐτῶν ἐλεύσεται.

III, 17.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

II, 15.

Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονος τοῦ μεγίστου, καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὃ ἐστι μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Vielleicht hat die ältere Sphärik auf diese Weise durch Übertragung einige Propositionen errungen. Weil sie sich nicht auf Dreiecke beziehen,

81) Dafs in der That diese Begriffe dem Theodosios bekannt waren, zeigen die Definitionen in seiner *Sphärik* I, def. 4—5.

haben sie für Menelaos keinen Zweck; das in dieser Beziehung Notwendig findet er auch bei seinen Vorgängern.

Euklids 4. Buch kann wie das dritte übertragen werden; von eine solchen Übertragung treffen wir jedoch keine Spur.

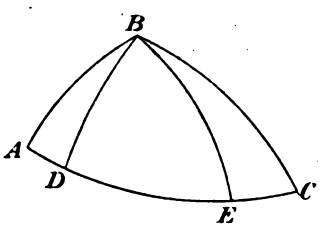
Euklids letztes geometrisches Buch, das 6., behandelt ähnliche Figuren solche existieren nicht auf der Kugel. Wahrscheinlich hat doch die Trans versalentheorie, namentlich Euklid VI, 2, die Idee zu den sphärischen Sätzen Menelaos I, 23—25 gegeben (vgl. oben Seite 30).

Mit Ausnahme von Menelaos I, 20—22, die nur auf der Kugel gelten restiert uns vom ersten Buch lediglich die Satzgruppe 26—35. Die Theo reme dieser Gruppe vergleichen die drei Elementenpaare (siehe Figur 30)

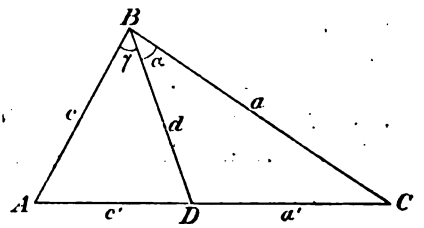
$$\smile AD \quad \text{und} \quad EC$$
$$\angle ABD \quad \text{und} \quad EBC$$
$$\smile BA + BC \quad \text{und} \quad BD + BE.$$

Vorausgesetzt, dafs $\smile BC > BA$, und dafs die Elemente eines dieser Paar gleich sind, beweist man die Gleichheit oder die Ungleichheit der anderen zwei. Je nachdem $\smile BA + BC \gtreqless 180^0$ ist, bekommt man verschieden Fälle.

Ein Scholion von Halley im Schlufs des ersten Buches fügt hinzu „*Die Sätze 30—35 gelten auch in der Ebene; denn die kleinsten sphärisch*



Figur 30.



Figur 31.

Dreiecke haben die Form und Natur der ebenen Dreiecke.“ Der Herausgeber hat sagen wollen, dafs die Fälle $\smile BA + BC < 180^0$ entsprechende Resultate in der Ebene haben, nämlich:

Spezialfall (Figur 31):

Gegeben:	Zu beweisen:		entsprechen im Men
1. $c' = a'$	$\angle \gamma > \alpha$, $a + c > 2d$		
2. $\angle \gamma = \alpha$	$a + c > 2d$,	$c' < a'$	I, 30
3. $a + c = 2d$	$\angle \gamma > \alpha$,	$c' > a'$	I, 31.

Voraussetzung: $a > c$.

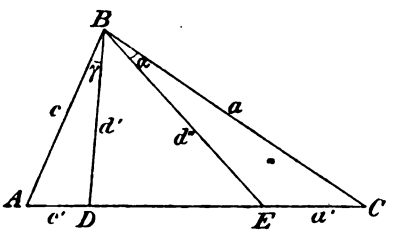
Allgemeiner Fall (Figur 32):

Gegeben:	Zu beweisen:	entsprechen im Men.
4. $c' = a'$	$\angle\gamma > \alpha$, $a + c > d' + d''$	I, 33
5. $\angle\gamma = \alpha$	$a + c > d' + d''$, $c' < a'$	I, 34
6. $a + c = d' + d''$	$\angle\gamma > \alpha$, $c' > a'$	I, 35.

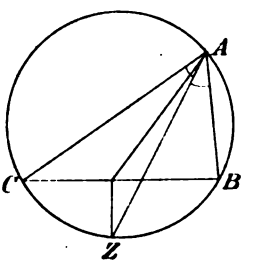
Voraussetzung: $a > c$.

Finden wir nun diese Theoreme in der Geometrie der Ebene vor Menelaos? Es ist mir nicht gelungen, sie als Ganzheit zu finden; nur hie und da habe ich ihrer verschiedene entweder als Sätze oder Voraussetzungen angetroffen, nämlich:

Euklid, Optik 4[82]) „*Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται*“, d. h. es wird



Figur 32.



Figur 33.

hier dasselbe bewiesen, wie im obenerwähnten Falle 1a, Menelaos I, 30, 2 entsprechend.

Euklid, Optik 7 „*Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντα ἴσα μεγέθη μὴ ἐφεξῆς ἀλλήλοις τεθέντα καὶ ἄνισον διεστηκότα τοῦ ὄμματος ἄνισα φαίνεται*“, ist eine Erweiterung des vorigen Satzes für den Fall, wo die Linienstücke, die betrachtet werden, nicht kontinuiert sind, also 4a oder Menelaos I, 33, 1.

Euklid, *περὶ διαιρέσεων* **28**[83]): „Die Figur $ABZC$ (Figur 33) mittels einer Geraden in zwei gleiche Teile zu teilen.“ Die Figurenkonstruktion zeigt uns, dafs Euklid 1a und 2a der obigen Fälle gekannt hat.

Archimedes, *περὶ ἑλίκων* **13.**[84]) Hier wird vorausgesetzt, dafs das Doppelte der Halbierungsgeraden eines Dreiecks kleiner als die Summe der zwei einschliefsenden Seiten ist, d. h. 2a oder Menelaos I, 30, 3. Der Fall 2b (Men. I, 30, 1) ist als bekannt vorausgesetzt in

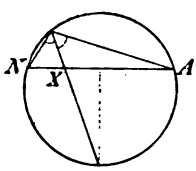
82) *Euclidis opera omnia*, ed. Heiberg VII, p. 6 ff.

83) Woepcke im Journal asiatique 1851, p. 240.

84) *Archimedis opera*, ed. Heiberg II, p. 57, Note 2; vgl. Heiberg, *Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze*, Zeitschr. f. Math. u. Physik 24, hist.-litter. Abt., p. 178 unten.

Apollonios, *κωνικά* **VI, 32**[85]) (Halleyausgabe p. 90), wo vorausgesetzt wird $NX < XA$ (Figur 34).

Die obengenannten Fälle 1a, 2, 4a haben wir also als Theoreme (Euklid) oder Voraussetzungen (Archimedes und Apollonios) nachweisen können. Möglicherweise hat ein Werk existiert, wo diese Fälle bewiesen wurden, vielleicht vor Euklid, jedenfalls vor Archimedes. Unwillkürlich müssen wir hier an die voreuklidischen Elemente denken, deren Inhalt wir ja gar nicht kennen; ohne Zweifel ist es nicht das geringste Verdienst des Euklid, dafs er solche Satzreihen die ohne prinzipales Interesse waren, aus dem Bereich der Elemente verwiesen hat.



Figur 34.

Wahrscheinlich ist es doch Menelaos selbst, der die Elemente $a + c$ und $\smile BD + BE$ in die Untersuchung hineingezogen hat; denn diese Figurenteile hatte er im zweiten Buch (II, 10) nötig, und diesem Umstand verdanken wir offenbar die ganze Satzgruppe 26—35 im ersten Buche.

Die langatmigen sphärischen Beweise dieser Sätze können aus der Ebene übertragen worden sein. Durch Euklid VI, 3 erhält man jedoch in der Ebene viel leichtere Beweise. Die Beweise in der Optik geben in diese Beziehung keinen Aufschlufs.

Als Erfolg der Untersuchung über Menelaos' 1. Buch ergiebt sich:

„Menelaos hat den Begriff 'sphärisches Dreieck' in die Mathematik eingeführt, definiert und demselben einen Namen gegeben (τρίπλευρον). Mit Hülfe des ersten Buches der Euklidischen Elemente hat er die elementare Lehre dieser Dreiecke gegründet. Zu diesem Zweck hat er die übertragbaren Dreieckssätze aus Euklid auf die Kugel übertragen. Die Anzahl dieser Sätze hat er mit den reziproken und dualistischen Sätzen ergänzt. Die Konkruenztheorie hat er im Gegensatz zu Euklid erschöpfend behandelt. Was die Beweisführung betrifft, hat er eher von Euklid gelernt, als er ihm gefolgt ist. Euklids antithetische Beweise vermeidet er immer und zieht direkte analogen vor. Sonst hat er immer den leichtesten Beweisen den Vorzug gegeben und deshalb oft Sätze aus den früheren sphärischen Werken vorausgesetzt. Ein besonderes Interesse hat er für die Gattung von Sätzen, die wir in Euklid I, 24—25 finden. In Verbindung mit seiner Arbeit über die Sphärik steht eine Arbeit über ebene Dreiecke, die als eine Ergänzung des ersten Buches Euklids dienen sollte, und wo er auch die Euklidischen Sätze

85) *Apollonii Pergaei conica*, ed. Halley, Oxford 1710.

gelegentlich mit neuen Beweisen versehen hat. — Das ganze erste Buch des Menelaos ist als ein originelles zu betrachten."

Bei Menelaos' nächstem Nachfolger, Ptolemaios, kann man erwarten, die Sätze dieses ersten Buches als Voraussetzungen zu finden.

In dieser Erwartung wird man nicht getäuscht. Als Beispiele nennen wir die Sätze Menelaos I, 2, 4a u. 4b, deren Gebrauch in Ptolemaios' *Syntaxis* deutlich genug ist.[86]) Deswegen hegen wir kein Bedenken, zu behaupten, dafs Menelaos' *Sphärik* für das Studium der *Syntaxis* von Bedeutung war, was Tannery zu leugnen scheint.[87])

Pappos referiert, wie oben erwähnt, Menelaos I, 5, 6, 30 u. 33[88]); Theon von Alexandria I, 4, 13 u. 14.[89]) Letzterer gebraucht aufserdem oft Sätze aus Menelaos' erstem Buch ohne Quellenangabe. — Überhaupt, wo man den Namen *τρίπλευρον* im Ptolemaios, Pappos und Theon findet, bezieht sich der Text meistens auf eine Anwendung von Menelaos' erstem Buch.

Fünftes Kapitel.

Menelaos' zweites Buch.

a. Übersicht des zweiten Buches.

Dieses Buch, das mathematisch ganz ohne Bedeutung ist, bietet dagegen vielerlei Interessantes, wenn man es mit den älteren sphärischen oder astronomischen Werken vergleicht. Deshalb brauchen wir den Inhalt nur kurz zu referieren, um ihn dann mit dem Inhalt anderer Werke vergleichen zu können. Entweder müssen wir nämlich mehrere der „mittleren Bücher" in unsere Untersuchung mit hineinziehen, oder aber können wir ebenso gut Menelaos' zweites Buch stillschweigend übergehen. Um nicht die Untersuchung zu weit auszudehnen, möchten wir sie gern auf die Sphärik beschränken und die Astronomie ausschliefsen. Das geht aber nicht. Die

86) *Ptolemaei Syntaxis math.*, ed. Heiberg I, p. 96, 24 — 119, 7 — 148, 3 — 149, 3 — 155, 2 — 161, 18 — 163, 15.

87) Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 35, Note 2.

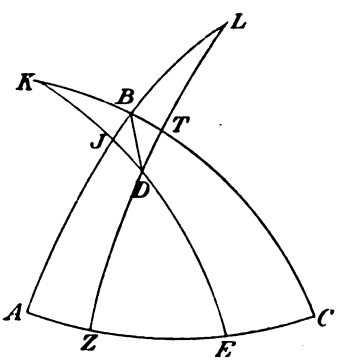
88) Pappus, ed. Hultsch, p. 476; vgl. oben Seite 4 und unten Seite 55.

89) Vgl. oben Seite 5 und 22 ff.

griechische Sphärik und Astronomie sind, wie wir sehen werden, so eng mit einander verbunden, daſs man sie nicht einzeln behandeln kann. Es ist jedoch nicht unsere Absicht, eine erschöpfende Geschichte der griechischen Sphärik zu geben; dazu fehlen auſserdem genügende Ausgaben der betreffenden Werke. Wir beschränken uns auf die Hauptprobleme, die wir von einem Verfasser auf den anderen verfolgen, um somit die Entwickelung bis Ptolemaios klar legen zu können. Zuerst aber resumieren wir den Inhalt des zweiten Buches Menelaos'.

II, 1—2: *„Von einem beliebigen Punkte der einen Seite eines sphärischen Dreiecks einen gröſsten Kreisbogen zu ziehen, der mit der Basis einen Winkel bildet, einem der an der Basis liegenden Dreieckswinkel gleich."*

Diese Konstruktion ist für verschiedene Gattungen von Dreiecken ausgeführt, für solche nämlich, wo dieses Problem den Existenzbeweis der in den folgenden Theoremen behandelten Figuren bildet.



Figur 35.

II, 3. Seien (Figur 35) im Dreieck ABC wo $\angle B \leqq 90^0$, $\smile AB < 90^0$ u. $\smile BC < 90^0$ gezogen die Bogen JDE und TDZ (J auf AB, T auf BC), so daſs $\angle DZE = A$ u. $\angle DEZ = C$.

Dann ist zu beweisen, daſs:

$$\smile BT < DJ \quad \text{und} \quad \smile BJ < DT.$$

Beweis: Man verlängert die Bogen AJ und ZT, CB und EJ bis zum Schnitt bezw. in L und K. Dann wird $\smile LA + LZ = 180^0$ (I, 10) oder $\smile BJ + LD < 180^0$, wodurch $\angle JBD > BDL$ (I, 10). Analog wird $\angle TBJ > BDK$ d. h. $90^0 \geqq B > TDJ\ (= D)$, oder $\angle B + D < 180^0$. Weil nun im Viereck $BTDJ$ die Winkelsumme $> 4R$ (durch Erweiterung von I, 11) wird $\angle T + J > 180^0$, und somit (durch Erweiterung von I, 19)

$$\smile BT < DJ, \quad \smile BJ < DT \quad \text{q. e. d.}$$

Es ist dies der Fundamentalsatz des zweiten Buches, mit dessen Hülfe alle die folgenden bewiesen werden.

Die Sätze **II, 4—9** können wir in Bezug auf eine und dieselbe Figur (36) so zusammenfassen:

Vorausgesetzt, daſs im sphärischen Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c

1. $\angle B \leqq 90^0$, $\angle A = A_1 = A_2 = A_3$ und $a < 90^0$, $c < 90^0$,

so wird,

wenn:	auch:
$b_1 = b_2$, $a \gtreqless c$	$a_1 < a_2$ und $c + c_3 < c_1 + c_2$ [II, 4^2 u. 5],
$a_1 = a_2$	$b_1 > b_2$ und $c + c_3 \lesseqgtr c_1 + c_2$, je nachdem $a \gtreqless c$ [II, 4^1, 6 u. 7^3],
$c + c_3 = c_1 + c_2$	$b_1 > b_2$ und $a_1 \gtrless a_2$, je nachdem $a \gtrless c$ [II, $7^{1,2 \text{ u. } 4}$].

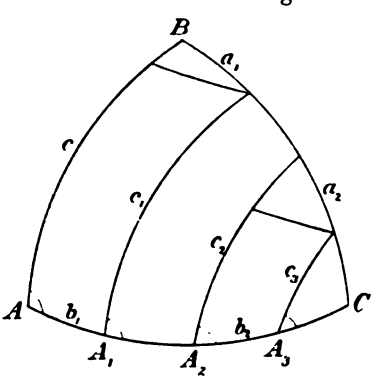
2. Wenn $\angle A < 90^0$, $\angle C < 90^0$, $\angle A = A_1 = A_2 = A_3$, $a < 90^0$, $c < 90^0$ und $c \gtrless a$,

so hat man für $a_1 = a_2$, dafs $b_1 > b_2$ [II, 9].

3. Wenn $\angle B \lesseqgtr 90^0$, $\angle A_3 = A$, $90^0 \gtreqless a > c$, $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$,

so hat man, dass $\angle A_3 > A$, wenn $\angle A_1 = A$, und dass $\angle A_1 < A$, wenn $\angle A_3 = A$ [II, 8].

Es ist dies eine bunte Mischung von Sätzen, die aufserdem so wenig erschöpfend behandelt sind, dafs sie nicht einmal eine zusammenhängende Theorie bilden. Man ahnt sofort, dafs es mit diesen Sätzen eine ganz besondere Bewandtnis haben mufs; und so ist es in der That. Das, worauf es ankommt, wird erst in den letzten 4 Sätzen (10—13) bewiesen; dieselben sind eigentlich nur Wiederholungen der oben zitierten, die diesmal nur nicht als Dreieckssätze formuliert werden. II, 10, 12 u. 13 können wir so zusammenfassen:



Figur 36.

Seien (Figur 36) gegeben die gröfsten Kreise AC und CB, $\angle C$ spitz, und seien auf BC ($\leqq 90^0$) genommen zwei gleiche Bogen $a_1 = a_2$. Durch die Endpunkte dieser Bogen a_1 und a_2 sind gezogen Kreise parallel mit AC und ferner gröfste Kreise, die

II, 10 senkrecht auf AC stehen, also durch den Pol der Parallelkreise ($\pm \smile AC$) gehen, oder

II, 12 mit AC gegen C gleiche stumpfe Winkel bilden, also einen Parallelkreis, kleiner als den von AB berührten, tangieren, oder

II, 13 mit AC gegen C gleiche spitze Winkel bilden, also einen Parallelkreis, gröfser als den von AB berührten, tangieren, aber auf entgegengesetzter Seite.

In allen drei Fällen wird bewiesen, dafs die Bogen auf AC ungleic werden und zwar: $b_1 > b_2$ [II, 6 u. 9],

ferner dafs die Differenzen der Bogen zwischen AC und BC ungleic werden, und zwar:

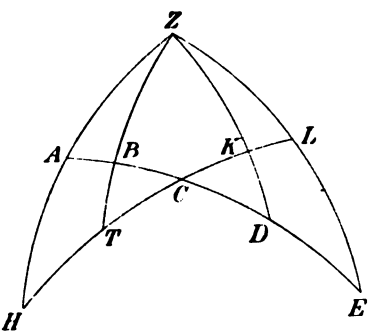
$$\left.\begin{array}{l}\text{in 10 für } A = 90^0 \\ \text{in 12 für } A > 90^0\end{array}\right\} c \dot{-} c_1 < c_2 \dot{-} c_3 \text{ (II, 6)}$$

$$\text{in 13 für } A < 90^0 \quad c \dot{-} c_1 > c_2 \dot{-} c_3 \text{ (II, 9).}$$

Satz **II, 11** endlich sagt:

Wenn (Figur 37) zwei gröfste Kreise AE und HL einander in schneiden, und auf dem Kreise AE die Stücke $CB = CD$ (B auf A D auf CE), ferner auch die Stücke $AB = ED$, und wenn durch A, D, E vier gröfste Kreise gezogen werden, die durch den Pol Z entwed von AE oder von HL gehen, so schneiden diese gröfsten Kreise in beid Fällen auch von HL gleiche Stücke ab, also $HT = KL$.

Bei Menelaos diese 4 Sätze (II, 10—13) zu treffen, die ganz i Gegensatz zu allen seinen anderen Sätzen nicht als Dreieckstheoreme fo muliert sind, ist in dem Grade auffällig, dafs wir unwillkürlich hier astr nomische Anwendungen und Wiederholungen aus älteren Werken zu spür glauben. So verhält es sich in der Th auch. Um die Verhältnisse klar zu lege müssen wir uns folgende Thatsachen v Augen halten.



Figur 37.

1. Theodosios' *Sphärik* III, 5 fä mit Menelaos II, 10^2, Theodosios III mit Menelaos II, 10^1 zusammen, nur d bei Theodosios die Bogen a_1 und (siehe Fig. 36) kontinuiert liegen. Die Beschränkung findet aber bei Theod sios III, 9 nicht statt, welcher Satz mit ganz mit Menelaos II, 10^1 zusammenfällt. — Theodosios III, 7— fallen mit Menelaos II, $12^{1,2}$ zusammen, doch mit der eben erwähnten B schränkung. — Menelaos II, 11 ist eine Erweiterung von Theodosi III, 13. — Die Beweise dieser Sätze sind bei Theodosios und Menela ganz verschieden, bei ersterem meistens sehr langatmig.[90])

90) Menelaos weist selbst darauf hin und verspricht die Darstellung Theodosios verbessern zu wollen. Eine Übersetzung der betreffenden Stelle fin sich unten Seite 64—65.

2. Die, wie wir sehen werden, in der Geschichte der Astronomie wichtigsten dieser Sätze, Theodosios III, 7—8 (Menelaos II, 12) setzt schon Euklid (in den φαινόμενα) als bekannt voraus, um damit zwei astronomische Hauptsätze zu beweisen.[91])

3. Pappos giebt im 6. Buche seiner συναγωγή einen umfangreichen Kommentar zu mehreren der Werke des μικρὸς ἀστρονομούμενος.[92]) Er fängt hier mit Theodosios' *Sphärik* an, und als Hülfssätze zu diesem Werke führt er gleich an:

Pappos VI, 1: *„Wenn auf der Oberfläche einer Kugel drei gröfste Kreise, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, einander schneiden, ist die Summe je zweier gröfser als der dritte."*

Dieser Satz ist aber mit Menelaos I, 5 identisch. Den Beweis führt Pappos im Gegensatz zu Menelaos auf Euklid, *elem.* XI, 20 zurück; letzteren haben wir auch oben mit Menelaos I, 5 identifiziert.[93]) Nun folgen die schon mehrmals erwähnten Worte: *„Eine solche Figur nennt in der Sphärik Menelaos τρίπλευρον."*

Pappos VI, 2—4 sind identisch bezw. mit Menelaos I, 6, 30^3 u. 33. Die Beweise führt Pappos wie Menelaos.

Danach sagt Pappos: *„Wenn dieses bewiesen ist, können wir Theodosios III, 5 anders beweisen."* Dieser neue Beweis folgt als Pappos VI, 5. VI, 6 beginnt mit den Worten: *„Beweisen wir es, wenn die gleichen Bogen nicht kontinuiert sind; dies bewies nämlich Theodosios nicht."* Der Beweis folgt und ist mit dem in Menelaos II, 10^2 identisch.

Mit anderen Worten: Pappos hat Menelaos' Sphärik wie die des Theodosios vor sich gehabt; er hat erkannt, dafs Menelaos den Hauptsatz III, 5 des Theodosios verallgemeinert und mit einem neuen Beweise versehen hat, und durch die notwendigen Excerpte aus Menelaos hat er seinen Schülern beim Studium von Theodosios' Sphärik dies klar gemacht.

4. Erinnern wir uns aufserdem des schon oben erwähnten Berichtes[94]) des Pappos, dafs die in Euklids φαινόμενα behandelten Probleme über Auf- und Untergang der Tierkreiszeichen auch von Menelaos behandelt und von Hipparch numerisch gelöst wurden, so schliefsen wir mit Grund folgendes: Menelaos' zweites Buch behandelt eigentlich ein astronomisches Problem, das man auf die Zeit des Euklid zurückführen kann. Dasselbe ist in den φαινόμενα erörtert und von Hipparch trigonometrisch gelöst. Auch Me-

91) Vgl. unten Seite 57 ff.

92) Pappos, ed. Hultsch, p. 474—632.

93) Vgl. oben Seite 4 und 31.

94) Vgl. oben Seite 4 und unten Seite 70.

nelaos hat eine *astronomische* Abhandlung darüber verfafst. — Das Problem veranlafste sehr früh die Aufstellung sphärisch-astronomischer Sätze, die dann in rein mathematischer Form in Theodosios' *Sphärik* reproduziert wurden und zuletzt den Gegenstand des *ganzen* zweiten Buches von Menelaos' *Sphärik* bildeten, wo mit Hülfe der neugefundenen sphärischen Dreieckssätze die alten Sätze neu bewiesen werden.

Gelegentlich können wir schon hier noch mehr Schlüsse ziehen, von denen wir später Gebrauch machen werden, nämlich:

1. Zu Pappos' Zeit war Theodosios' *Sphärik* das klassische, das allgemeine sphärische Lehrbuch, während die schwerer zugängliche *Sphärik* des Menelaos wahrscheinlich nur von den weiter vorgeschrittenen gebraucht wurde.

2. Es besteht wahrscheinlich ein kausaler Zusammenhang zwischen den Problemen, die wir von Euklids *φαινόμενα* durch Theodosios bis zu Menelaos verfolgen können, und der ältesten sphärischen Trigonometrie.

Wir werden deswegen versuchen, zuerst den Umfang der älteren Sphärik möglichst genau festzustellen, um dann die weitere Entwickelung bis auf Ptolemaios klar zu legen, weil wir erst dadurch eine sichere Grundlage erhalten werden für die Untersuchung der viel wichtigeren Frage, worauf un Menelaos' 3. Buch hinweist, der Erfindung der Trigonometrie.

b. Die voreuklidische Sphärik.

Nokk[95]) hat zuerst bemerkt, dafs Euklid in den *φαινόμενα* mehrmal sphärische Sätze vorausgesetzt hat, und dafs sie fast alle sogar mit dem selben Wortlaut, mit dem sie Euklid zitiert, im Theodosios sich finden Er schliefst daraus, dafs eine *voreuklidische Sphärik* existiert haben mufs In der Autolykosausgabe und anderswo hat Hultsch[96]) bewiesen, dafs mi Autolykos, einem älteren Zeitgenossen von Euklid, ganz dasselbe de Fall ist. Was die *φαινόμενα* betrifft, so hat Heiberg[97]) sie unabhängig von Nokk aufs neue eingehend erörtert. Die beiden letzten Forscher sowie Tannery[98]) stimmen darüber überein, dafs die *voreuklidische Sphärik* de Schule in Kyzikos oder gar deren Gründer, dem berühmten Eudoxos, zu zuschreiben ist.

95) A. Nokk, *Über die Sphärik des Theodosios*, Karlsruhe 1857.

96) Fr. Hultsch, *Bericht der phil.-hist. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellsch. d Wissenschaften* 1885, p. 167—174; *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, Neue Jahrbüche 1883, p. 415—420; Autolycus, ed. Hultsch, Leipzig 1885, Praefatio, p. XI ff.

97) J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, Leipzig 188 p. 41—52.

98) P. Tannery, *La géométrie grecque*, p. 133—134; *L'astronomie ancienn* p. 57 ff.; Rezension im Bulletin des sciences mathématiques 2e série, X, Paris 1886, p. 195 ff.

Euklids *φαινόμενα*.

Aus diesem Werke zitiert Heiberg eine Reihe von Anwendungen sphärischer Sätze und stellt die entsprechenden Sätze des Theodosios daneben. So konstatiert er, dafs Theodosios I, 1, 12, 13, 15; II, 5, 9, 13, 15, 17, 18, 19, 22; III, 7 von Euklid wörtlich zitiert sind. Zu diesem Vergleich wendet Heiberg jedoch nur *φαινόμενα* 1—8 an, weil der Gregoryausgabe, wie er nachweist, eine jüngere, wahrscheinlich von Theon aus Alexandria herrührende Redaktion zu Grunde liegt, während im Codex Vindob. graec. 103 eine sehr abweichende, aber weit ursprünglichere Redaktion vorliegt. Diese Handschrift hat Heiberg kollationiert; er hat sie aber nicht benutzen wollen, ohne sie herauszugeben. Daher kommt es, dafs er die Vergleiche, wozu die Sätze 9—18 Anlafs geben können, nicht mitgenommen hat, weil eben hier die zwei Redaktionen ganz von einander abweichen. Seine Kollation hat er mir freundlichst zur Verfügung gestellt, damit ich das Material zum Feststellen des Inhalts der *voreuklidischen Sphärik* ergänzen kann.

Aufser den von Heiberg zitierten Stellen gebe ich also aus seiner Kollation des Codex Vindob. gr. 103 folgende:

c. Vindob. prop. 12 (Figur 38).

... *ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ* $\overline{αβγ}$ *κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ* $\overline{ρστ}$ *ἐφάπτεται· ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ* $\overline{αηγ}$ *μείζων*[1] *ἐφάπτεται, ἢ ὧν ὁ* $\overline{αβγ}$ *ἐφάπτεται; καὶ ἀπειλημέναι*[2] *εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ* $\overline{αθ}$, $\overline{θκ}$, $\overline{κη}$ *ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ* $\overline{βηλ}$· *διὰ τῶν* $\overline{θ}$, $\overline{κ}$ *σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν οἱ* $\overline{σφ}$, $\overline{τχ}$ *ἐφαπτόμενοι τοῦ* $\overline{ρστ}$ *κύκλου, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς* $\overline{αβγ}$ *ἐφήπτετο, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν* $\overline{σ}$, $\overline{τ}$ *ἐπαφῶν ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ* $\overline{κ}$, $\overline{θ}$ *μέρη τῷ* $\overline{ραβ}$ *ἡμικυκλίῳ τοῦ ὁριζόντος, ἐφ' οὗ ἐστιν ἡ συναφὴ τοῦ λοξοῦ κύκλου, ἡ μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγί-*

1) *μειζόνων?*
2) *ἀπειλημμέναι?*

Theodosios III, 8.

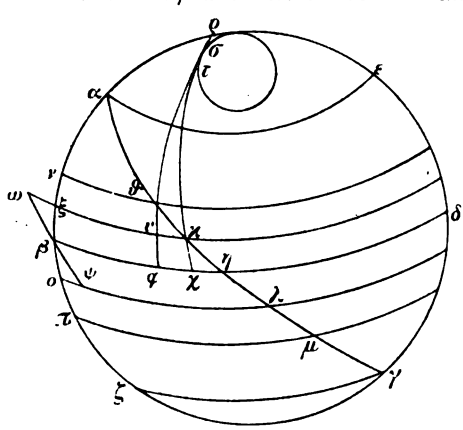
Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος τινὸς κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο· ἔτι δὲ αἱ ἀφαὶ ὦσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν ἐπαφῶν ἡμικύκλια, ὡς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν σημείων, δι' ὧν ἐγράφησαν, τῷ ἡμικυκλίῳ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τῷ, ἐφ' οὗ ἂν ᾖ ἡ συναφὴ τοῦ λοξοῦ κύκλου, ἡ

στου τῶν παραλλήλων· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν βφ περιφέρεια τῆς φχ, ἡ δὲ φχ τῆς χη, ... μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

c. Vindob. prop. 12 hat aufserdem folgenden Passus (Figur 38)[99]):

... καὶ ἴση ἐστὶν ἡ κη τῇ ηλ[1]), ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ωβ τῇ βψ, καί ἐστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ βηδ, καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ωκ, ψλ.[2]) ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ωκ τῷ ψλ, ὥστε καὶ ἡ βξ τῇ βο[3]) ἴση ἐστίν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ω ἄρα ἐπὶ τὸ ψ, ὥστε καὶ ἡ ωξ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ οψ. ...

Vergleichen wir diesen Passus mit Theodosios III, 3, so können wir nicht bezweifeln, dafs letzterer von der *alten Sphärik* herstammt. Auch Theodosios II, 13 u. 17, die Heiberg schon verglichen hat, werden hier verwendet.



Figur 38.

Heiberg zeigt ferner, dafs Theodosios II, 1 u. 8 dem Euklid bekannt waren. Aufserdem zitiert er einen Satz: „καὶ ἐπεὶ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν *A* σημεῖον τῷ *B*, τὸ δὲ *E* τῷ *Z*, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *EB* περιφέρεια τῇ *AZ* περιφερείᾳ“, dem Theodosios keinen genau entsprechenden hat. Dieser Satz läfst sich aber leicht durch Euklid, *elem.* I, 15, III, 26 und Theodosios I, 11 beweisen, sodafs letzterer wahrscheinlich in der *alten Sphärik* stand.

Hierzu kommt Theodosios II, 20, der in den Worten: „καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἢ ὅμοια ἡ *AΔ* περιφέρεια τῆς *HMΘ* περιφερείας, ἡ δὲ *HMΘ* τῆς *KZΛ*, καὶ ἔτι ἡ *KZΛ* τῆς *BΓ*“ liegt.[100])

1) Korrig. aus νλ. 2) Korrig. aus ϑα. 3) Korrig. aus ωξ.

99) Auf dieser Figur sind αβγ, σφ und τχ verschiedene Lagen des Horizontes; ρστ die Grenze der immer sichtbaren Sterne; βηδ der Äquator; αε und γζ die Wendekreise; αηγ und ωβψ verschiedene Lagen der Ekliptik; α der Nullpunkt des Krebses, η der der Waage; νϑ, ξκ, ολ und πμ sind Tagebogen; die Bogen ϑκ und κη sind gleich.

100) Euklid, φαινόμενα, ed. Gregory, p. 574.

Aus den Worten: „*καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς ΕΖ ἐφάπτεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνει τὸν ΒΑ, καὶ ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΕΖ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΚΗ, ΛΜΝ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΒΑ, μεῖζων ἐστὶν ἡ ΟΜΞ περιφέρεια τῆς ΟΔ περιφερείας*“[101]) sieht man, daſs entweder Theodosios II, 22 und III, 2 oder ein diese beiden remplazierender Satz in der *alten Sphärik* stand.

Aus den *φαινόμενα* lassen sich also mit Sicherheit oder gröſster Wahrscheinlichkeit folgende Sätze herauslesen:

Theod. I, **1**, 11, **12**, **13**, **15**;
II, 1, **5**, 8, **9**, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**,
III, 2, **3**, **7**, **8**

(die wörtlich zitierten Sätze sind **fett** gedruckt).

Autolykos.

περὶ κινουμένης σφαίρας und
περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων.

Wie erwähnt, zitiert Hultsch in der Autolykosausgabe Theodosios.[102]) Die betreffenden Stellen, die also der *alten Sphärik* angehören, hat er in den *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* gesammelt. Diese Zusammenstellung sowie die ganze Frage über die *voreuklidische Sphärik* erörtert er in der Vorrede zur Autolykosausgabe. Die Sätze aus Theodosios, deren genauen Wortlaut wir im Autolykos finden, sind:

Theod. I, 7, 8, 15;
II, 2, 10a, 13;
III, 1b;

alle in *περὶ κινουμένης σφαίρας*.

Von diesen sind I, 15 und II, 13 schon durch die *φαινόμενα* parallelisiert. Die übrigen lassen wir hier folgen:

Autolykos' *περὶ κινουμένης σφαίρας.* (Seite, Zeile)	Theodosios' Sphärik. (Buch, Satz)
46, 3:	I, 7:
καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ γδβ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τοῦ θ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ γδβ κύκλου ἐπέζευκται εὐθεῖα ἡ θε, ἡ θε ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν γδβ κύκλον.	*ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον.*

101) *φαινόμενα*, ed. Gregory, p. 586 oben; Cod. Vindob. gr. 103 hat denselben Satz, aber in verstümmelter Form.

102) Seite 83 in der Autolykosausgabe zitiert Hultsch, *Theod. sphaer.* I, 20 statt II, 15.

4, 21:

καὶ φανερὸν ὅτι τὰ α, β σημεῖα πόλοι ἔσονται τοῦ γραφέντος κύκλου, ἐπειδήπερ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἦκται καὶ ἐκβέβληται ἡ αβ ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

6, 1:

οἱ δὲ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσί.

8, 3:

ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ γε, δζ, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν οἱ αγδβ, δεζβ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ γε περιφέρεια τῇ δζ περιφερείᾳ.

24, 6:

κύκλου δή τινος τοῦ αβδγ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ηθ τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκεν τὸ ηζθ, καὶ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος τοῦ ηζθ περιφέρεια εἰς ἄνισα τέτμηται κατὰ τὸ ζ σημεῖον, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἡ ζη περιφέρεια· ἡ ζη ἄρα εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ζ σημείου πρὸς τὸν αβδγ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· καὶ ἡ ἔγγιον ἄρα τῆς ζη ἐλάσσων ἐστίν· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ζε τῆς ζβ.

I, 8:

ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη· ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου.

II, 2:

οἱ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν.

II, 10, erster Teil:

ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὅμοιαί εἰσιν, ...

III, 1, letzter Teil:

ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐπισταθῇ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα . . . . . ἐὰν δὲ ἡ διαχθεῖσα διάμετρος ᾖ τοῦ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ· ἐλάσσων μὲν ἔσται ἡ προσκειμένη εὐθεῖα πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα.

An diese Sätze schliefst sich aber eine Reihe von Sätzen, die Autolykos gebraucht hat, deren Wortlaut er aber nicht so genau zitiert, dafs wir sie wörtlich mit Theodosios vergleichen können. Es sind dies:

Theod. I, 1, 6a, 20;

II, 3, 5, 8, 20;

alle in περὶ κινουμένης σφαίρας vorausgesetzt, und Theodosios II, 15 in περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων.

Der Gebrauch von Theodosios II, 3 in *περ. κιν. σφ.* p. 20, 1 ist unsicher; als Voraussetzung für die wörtlich parallelisierten Sätze Theodosios II, 8 u. 15 wird seine Existenz vor Euklid jedoch ziemlich sicher gestellt. — Ganz unsicher ist der Gebrauch von Theodosios I, 9 in *περ. κιν. σφ.* p. 1, 15.

Durch die Anwendungen im Euklid und Autolykos läfst sich also konstatieren, dafs folgende Sätze *voreuklidisch* sind:

Theod. I, **1**, 6a, **7**, **8**, 11, **12**, **13**, **15**, 20;
II, 1, **2**, **3**, **5**, 8, **9**, **10a**, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**;
III, **1b**, 2, **3**, **7**, **8**

(die wörtlich zitierten Sätze sind **fett** gedruckt).

In der Übersichtstafel Seite 136 ist das ganze Material gesammelt. Neben den Sätzen aus Theodosios' *Sphärik* stehen bei jedem Satz die Sätze aus demselben Werk, durch welche er bewiesen wird. In den drei letzten Kolonnen sind aus bezw. Autolykos' zwei Werken und Euklids *φαινόμενα* die Stellen angeführt, wo sich die Sätze aus Theodosios (in erster Kolonne) finden; mit **fettem** Druck, wenn der Wortlaut derselbe ist, in einer Parenthese, wenn der Gebrauch unsicher ist.

Gelegentlich bemerken wir hier, dafs die Begriffe, die Theodosios gebraucht und definiert, zur Zeit eines Autolykos und eines Euklids geläufig waren. Der ältere dieser Verfasser (Autolykos) hat sie nämlich alle benutzt, wie die Beispiele in der Tafel es bestätigen.

Die Untersuchung über den Inhalt der *voreuklidischen Sphärik* ist mit dieser Übersicht nicht erledigt. Wir müssen noch untersuchen, welche Sätze wir ihr mit Wahrscheinlichkeit noch beilegen und über welche wir überhaupt nichts entscheiden können. Ein Kriterium dafür finden wir in Theodosios' Beweisverfahren, in der gegenseitigen Abhängigkeit seiner Sätze. Wenn z. B. die Existenz eines Satzes vor Euklid nachgewiesen ist, ist es an sich wahrscheinlich, dafs auch die Sätze, mit deren Hülfe Theodosios den betreffenden Satz beweist, voreuklidisch sind. Am besten wäre es, wenn wir in solchen Fällen die Notwendigkeit der Voraussetzungen nachweisen könnten; das läfst sich jedoch nicht leicht thun mit einem Werke wie dem des Theodosios, wo eine geänderte Definition oder eine andere Anwendung von den Sätzen der Elemente zu immer neuen Beweisen führen können. Dennoch dürfen wir diese Untersuchung nicht unterlassen, weil es sich schon gezeigt hat, dafs Theodosios' Sphärik und die alte einen so ähnlichen Inhalt haben, dafs es mehr als wahrscheinlich ist, dafs auch ihre Beweismethoden hauptsächlich einander gleich sind.

Zu dieser Untersuchung gebrauchen wir die eben deswegen hinzugefügte zweite Kolonne der Tafel Seite 136.

Ganz vereinzelt stehen offenbar:

Theod. I, 3, 4, 5, 16, 18, 19, 22, 23;
II, 11, 14, 16, 23;
III, 5, 6, 9—14;

sie werden weder direkt noch mit anderen Sätzen als Zwischenglieder zum Beweise irgend eines der parallelisierten Sätze gebraucht. Von den nicht parallelisierten Sätzen bleiben also zu näherer Untersuchung folgende übrig:

Theod. I, 2, 6b, 10, 14, 17, 21;
II, 4, 6, 7, 12, 21;
III, 2, 4;

von denen III, 2 schon als wahrscheinlich voreuklidisch bezeichnet werden könnte (vgl. oben Seite 59).

Von I, 2 wird nur das Corollar in I, 10 gebraucht; I, 10 ist die natürliche Voraussetzung von dem wörtlich zitierten I, 15. Die Stellung von I, 2 ist also unsicher, während I, 10 wahrscheinlich alt ist. — I, 6b ist die natürliche Voraussetzung von I, 11; I, 11 wieder von dem wörtlich zitierten II, 5; I, 6b und 11 sind somit wahrscheinlich voreuklidisch, umsomehr, weil wir schon vorher (siehe die Tafel) Grund hatten, dies von I, 11 anzunehmen. — I, 14 ist Voraussetzung von I, 21, dieser Satz wieder von den wörtlich zitierten II, 6 und 17; die Art dieser zwei Sätze ist jedoch eine solche, daſs dieser Gebrauch nicht genügt, um sie als alte festzustellen. — I, 17 ist die natürliche Voraussetzung von I, 20 und II, 15, die beide der alten Sphärik gehören; I, 17 ist somit wahrscheinlich voreuklidisch. — II, 4 ist Voraussetzung von II, 5, der doch durch II, 2—3 ohne 4 als Zwischenglied bewiesen werden kann. Die Stellung von II, 4 ist also unsicher. — II, 6 und 7 fallen ganz innerhalb des Bereichs der *φαινόμενα*, bilden ferner die natürliche Voraussetzung des wörtlich zitierten II, 8 und sind also der alten Sphärik zuzuschreiben. — II, 12, der inverse Satz von II, 11, remplaziert mit letzterem im Theodosios die Kongruenzsätze bei Menelaos. Aufserdem ist II, 12 Voraussetzung der wörtlich zitierten II, 15, 17 u. 22, die notwendigerweise einen Kongruenzsatz voraussetzen. Ohne Zweifel gehört also II, 12 der alten Sphärik an. — II, 21 ist Voraussetzung von II, 22, der doch sehr wohl ohne II, 21 bewiesen werden kann. Die Stellung des letzteren ist also unsicher. — III, 2, dessen Gebrauch in den *φαινόμενα* unsicher war, und III, 4, den wir bisher nicht angetroffen haben, sind, wenn wir der alten Sphärik nicht *ganz andere Beweismethoden* als der des Theodosios zumuten wollen, notwendige Voraussetzungen der wörtlich zitierten III, 7—8 und somit der alten Sphärik angehörend.

Als Endresultat dieser Untersuchung (deren Details wir natürlich nicht haben wiedergeben können), sowie der vorhergehenden Erörterungen, ergeben sich als ganz oder doch ziemlich sichere Bestandteile der *voreuklidischen Sphärik*:

Theod. I, **1**, 6, **7**, **8**, 10, 11, **12**, **13**, **15**, 17, 20;
II, 1, **2**, 3, **5**, 6, 7, 8, **9**, **10**, 12, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**;
III, **1**, 2, **3**, 4, **7**, **8**

(die ganz sicheren mit **fettem** Druck), während die Stellung von Theod. I, 2, 9, 14, 21; II, 4, 21 **unsicher** ist.

Es ergiebt sich also, dafs *von den* ***60*** *Sätzen im Theodosios* ***20*** *ganz sicher und* ***14*** *wahrscheinlich der alten Sphärik angehören, während* ***6*** *unsicher sind und* ***nur 20*** *übrig bleiben, über die wir nichts entscheiden können.*

Wenn Tannery[103]) sagt: *„Certainement on ne doit pas concevoir la Sphérique primitive comme développée suivant le plan de Théodose; on doit imaginer plutôt quelque chose comme le traité d'Autolycus sur la Sphère en mouvement, qui, en douze propositions, dit tout le nécessaire"*, so ist dies so falsch wie nur möglich.[104]) Wir würden vielmehr Grund zum Erstaunen haben, wenn wir nachweisen könnten, dafs ein Satz in Theodosios' *Sphärik* (die Sätze nach III, 10 doch ausgenommen) nicht vor Euklid bekannt wäre; ja! nach der vorhergehenden Untersuchung finden wir es sogar berechtigt, zu behaupten, dafs Theodosios' *Sphärik* nur eine Art Neuausgabe der *voreuklidischen* ist, wahrscheinlich lediglich zu Schulzwecken eingerichtet. Dagegen wollen wir nicht behaupten, dafs sie von A bis Z eine Abschrift der *alten Sphärik* ist. Im ersten und zweiten Buch können allerdings nur hie und da ein Paar Sätze von Theodosios eingeschaltet sein. Dagegen glauben wir nachweisen zu können, dafs die Sätze III, 11—14, der Schlufs von Theodosios' *Sphärik*, nicht voreuklidisch sein können, obgleich sie wahrscheinlich nicht Theodosios selbst zuzuschreiben sind.

Vergleichen wir Theodosios' *Sphärik* mit dem untrigonometrischen Teil der des Menelaos (Buch I—II), so müssen wir letzterer den Vorzug geben; aber wir vergleichen ja eigentlich auch nicht zwei einander in der Zeit naheliegende Werke, sondern vielmehr Werke, zwischen denen die ganze Blütezeit der griechischen Mathematik liegt; folglich steht es gar nicht so arg mit dem Werke des Theodosios, das wir ja doch ganz anders beurteilen müssen, wenn wir es z. B. Eudoxos' *Sphärik* nennen. Für Eudoxos' Zeit ist die Leistung durchaus nicht schlecht.

---

103) Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 38.

104) Das Richtige hat schon Hultsch herausgebracht; siehe *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, p. 416; Autolykosausgabe, Praefatio, p. XII; Bericht vom Jahre 1885 (vgl. oben) p. 171.

Eine Frage, der wir sonst eine grofse Bedeutung beilegen würden, verliert nun ihr Hauptinteresse, nämlich wann Theodosios lebte. Wenn sein *Sphärik* durchaus keine originelle ist, so ist es uns ziemlich gleichgültig wann sie geschrieben wurde. Wir wollen dennoch kurz die Frage berühren weil die Lösung derselben für die Schätzung der astronomischen Arbeiten des Theodosios vielleicht von Wert sein kann.

c. Wann lebte Theodosios?

Diese Frage hat Tannery kurz und klar auseinandergesetzt.[105]) Der Kern derselben ist, ob der Bericht des Suidas[106]) richtig ist. Dann ist nämlich Theodosios als *Tripolitaner* zu betrachten und *nach* Ptolemaios zu setzen; wenn nicht, so ist er nach den Zeugnissen von Vitruvius[107]) und Strabo[108]) aus *Bithynien* und jedenfalls nicht jünger als Vitruvius (ca. 20 n. Chr.).

Um den Bericht des Suidas zu entkräften, führt Tannery an, daſs ein Verfasser, der zwischen dem Sonnenjahr eines Meton und dem eines Kalippos schwankt, nicht wohl jünger als Ptolemaios sein kann. Das geben wir zu. Wenn aber Tannery sagt: *„il est d'autre part bien peu admissible, que ses Sphériques aient été composées, telles qu'elles sont, après celle de Ménélas“*, so sind wir wegen unserer abweichenden Auffassung über Theodosios' Originalität nicht damit einverstanden. Eine *Neuausgabe der alten Sphärik*, die immerhin die Voraussetzung aller hierher gehörenden Werke (auch der *Sphärik* des Menelaos) bildete, könnte zu jeder Zeit erschienen sein.

Wenn wir doch mit Tannery den Bericht des Suidas für ein Mischung zweier Berichte über zwei verschiedene Personen halten, so geschieht dies:

1. Wegen Pappos' Erwähnung von Theodosios III, 5, welcher Satz mit Propositionen aus Menelaos' *Sphärik* neu bewiesen wurde.[109])

2. Weil Menelaos öfters Theodosios' *Sphärik* und Theodosios selbst erwähnt, ohne daſs wir Grund haben, die Echtheit der betreffenden Stellen zu bezweifeln, zumal da sie, wie es scheint, in allen den arabischen Rezensionen übereinstimmend vorkommen, z. B. im Cod. Leid. 399[110]) (Redaktion von Al-Harawi) p. 99: „**Menelaos** sagt: *Da wir schon die einleitenden Sätze, die notwendig sind, erklärt haben, so wollen wir uns zu den*

105) Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 36—37.
106) Suidas, *Lexikon*, Artikel „Theodosios“.
107) Vitruvius, *de architectura* IX, 9.
108) Strabon, *Geographia* XII, p. 566.
109) Vgl. oben Seite 4, 31 und 55.
110) Mitteilung von R. Besthorn.

wenden, was **Theodosios** *erklären wollte; und wir werden es mit Hülfe von . . . . . beweisen, ohne dafs das Absurde darin Platz findet; und wir werden seine Irrtümer aufklären und seine Fehler verbessern*", und dieselbe Stelle in der Gerhardschen Übersetzung: „*Et quia nos iam ostendimus res, que premisse sunt, tunc nos sequamur illud cum demonstrationibus omnium rerum, que sunt in libro* **theodosii** *de speris cum conuersione illius iterum secundum modum communem aggregantem fortem. Et surgamus in primis et uerificemus proposita earum ipsis premissa. Et illud ideo quoniam in eis sunt quedam falsa*" (vgl. auch die Halleyausgabe p. 75, Zeile 5—9). — Mehrere ähnliche Stellen liefsen sich zitieren.[111]) Die obige haben wir gewählt, weil sie gerade vor Menelaos' neuem Beweis zu Theodosios III, 5 steht, und Pappos' Worte sich offenbar auf sie beziehen.

Wir betrachten also mit Tannery *Theodosios* als *Bithynier* und *älter* als Menelaos. — Seine astronomischen Werke verweisen ihn zunächst in die Zeit **vor** Hipparch, oder stempeln ihn wenigstens als einen unabhängigen Zeitgenossen desselben.

d. Zusammenhang zwischen Sphärik und Astronomie.

Nachdem wir nach Vermögen Fug und Recht gestiftet haben zwischen den Vorläufern des Menelaos, wollen wir die Hauptprobleme, die wir in Menelaos' zweitem Buch fanden, verfolgen, und zwar von der Zeit vor Euklid bis auf Ptolemaios, um nachzuweisen, wie sich die Sphärik aus der Astronomie entwickelt hat, und ferner, um das Material zur Untersuchung der Trigonometrie zurecht zu legen. Die Hauptsätze in Menelaos II waren 10, 12 u. 13. Zu 13 fanden wir keinen entsprechenden Satz im Theodosios. Als möglicherweise neueren Datums heben wir also vorläufig diesen Satz auf. Die Menelaos II, 10 entsprechenden Sätze waren Theodosios III, 5—6, die wir nicht als voreuklidisch feststellen konnten. Fangen wir also mit Menelaos II, 12 = Theodosios III, 7—8 an, die in den φαινόμενα zitiert werden und also in der *alten Sphärik* wörtlich wie im Theodosios standen.

Theodosios III, 7 wird zum Beweise des Satzes 8 in den φαινόμενα verwendet; letzterer lautet:

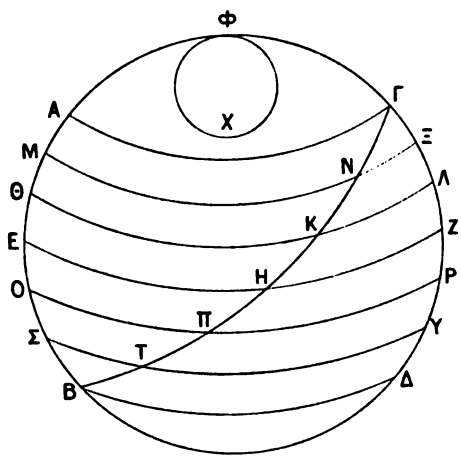
„*Die Zeichen der Ekliptik gehen in ungleichen Abschnitten des Horizontes auf und unter, und zwar in den gröfsten die am Äquator, in kleineren die zunächst folgenden, in den kleinsten die an den Wendekreisen, in gleichen aber die, welche gleich weit vom Äquator entfernt sind.*"

Beweis: Seien (Fig. 39) $AB\Delta\Gamma$ der Horizont, $A\Gamma$ und $B\Delta$ die Wendekreise, ΦX die Grenze der immer sichtbaren Sterne, ΓB die Ekliptik und

111) Vgl. unten Seite 116.

EZ der Äquator; dann ist zu beweisen, dafs die Tierkreiszeichen ΓN, N KH, $H\Pi$, ΠT und TB in ungleichen Horizontbogen auf- und untergeh Diese Bogen sind aber $\Gamma\Xi$, $\Xi\Lambda$ u. s. w., die (hier wird dann Theod. III wörtlich zitiert)[112]) von Γ bis Z wachsen und dann wieder abnehm Dafs $\Gamma\Xi = \Lambda T$ u. s. w., folgt durch Theod. II, 17.

Diese Anwendung von Theodosios III, 7 zeigt deutlich, dafs dieser S nur als ein astronomischer Satz in mathematischer Abfassung aufzufass ist. Die Entwickelung ist offenbar folgende. Ursprünglich wurde ein ast nomisches Problem bewiesen. Als mathematischer Satz abgefafst, wu dasselbe wie andere ähnliche ein Haupttheorem der *voreuklidischen Sphä* Das astronomische Problem ging in Euklids *φαινόμενα* über, wo Beweis nur in einer Zurückführung zum mathematischen Satze besta Dieser ging in Theodosios' *Sphärik* über. Der Satz aber war und bl



Figur 39.

derselbe und zwar, dafs die A gangsbogen gleicher Ekliptikbog (oder eigentlich die Differenzen Morgenweiten der nach einan folgenden Nullpunkte der Ti zeichen) gegen den Nordpunkt be Südpunkt wachsen. In Ptolemai *Syntaxis*[113]) wird es angegeben, man die Morgen- oder Abendweit berechnen kann, wenn man Deklination der betreffenden Ekl tikpunkte und die Polhöhe ken Für Ekliptikpunkte, die denselb Abstand vom Äquator haben, weist Ptolemaios, dafs die e sprechenden Horizontbogen (zwischen Parallelkreisen durch die zwei Eklipt punkte und dem Durchschnittspunkt des Horizonts und Äquators) gle werden, und zwar durch den Kongruenzsatz Menelaos I, 4a.

Ptolemaios behandelt also das alte Problem über die Horizontbog aber nur kurz, weil er desselben fernerhin nicht bedarf. Dieses Problem also für die berechnende Astronomie sehr unfruchtbar gewesen. Anders v hält es sich dagegen mit dem folgenden, Theodosios III, 8, welcher S in den *φαινόμενα* 12 zitiert wird.[114]) Er lautet:

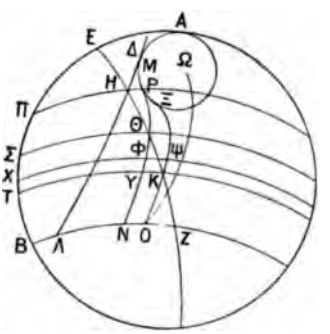
---

112) Vgl. oben Seite 57; und Heiberg, *Litt. Stud.* p. 45.
113) Ptolemaios, *Syntaxis* II, cap. 3, ed. Heiberg I, p. 95.
114) Vgl. oben Seite 57.

„Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebse gehen in ungleichen Zeiten unter, und zwar in der längsten die an den Berührungspunkten der Wendekreise, in kürzerer die zunächst folgenden, in der kürzesten aber die am Äquator; dagegen gehen die Bogen, welche gleich weit vom Äquator entfernt sind, in gleichen Zeiten auf und unter.“

Beweis (nach Cod. Vindob. gr. 103): Seien (Fig. 38) $\alpha\beta\gamma\delta$ der Horizont, $\varrho\sigma\tau$ der Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne, $\alpha\varepsilon$ und $\zeta\gamma$ bezw. der Sommer- und Winterwendekreis, $\beta\eta\delta$ der Äquator und $\alpha\eta\gamma$ die Ekliptik, von der $\alpha\eta\gamma$ der Halbkreis nach dem Krebse (d. h. Krebs — Schütze) und über der Erde ist. Seien ferner die Tierzeichen $\alpha\vartheta$, $\vartheta\varkappa$, $\varkappa\eta$, $\eta\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\gamma$ (alle gleich), so gehen $\alpha\vartheta$ und $\mu\gamma$ in der längsten Zeit auf, in kürzerer aber $\vartheta\varkappa$ und $\lambda\mu$, in der kürzesten $\varkappa\eta$ und $\eta\lambda$.

Indem wir durch ϑ und $\varkappa$ gröfste Kreise ziehen, die den Kreis $\varrho\sigma\tau$ berühren (diese Kreise sind also verschiedene Lagen des Horizontes), so haben wir: Während ϑ den Bogen $\vartheta\nu$ durchläuft, geht $\alpha\vartheta$ unter; — während $\varkappa$ den Bogen $\varkappa\nu$ durchläuft, durchläuft χ den Bogen $\chi\varphi$, und in dieser Zeit geht $\vartheta\varkappa$ unter; — während η den Bogen $\eta\chi$ durchläuft, geht $\varkappa\eta$ unter. — $\varphi\chi$ und $\chi\eta$ repräsentieren also die Zeiten, in welchen bezw. die gleichen Ekliptikbogen $\vartheta\varkappa$ und $\varkappa\eta$ untergehen. „Aber“, sagt Euklid, „in dieser Figur, wenn (hier wird Theod. III, 8 zitiert) u. s. w.“ ... „ist $\varphi\chi > \chi\eta$“, womit der Satz sofort bewiesen ist.



Figur 40.

Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes in der Geschichte der Astronomie referieren wir ausnahmsweise die Beweise von Theodosios (d. h. nach der alten Methode) und Menelaos.

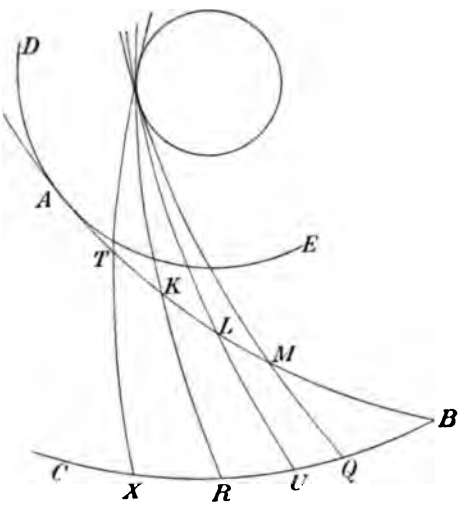
Theodosios III, 8 (Figur 40): Die mathematische Abfassung des Satzes hat weniger Interesse. Ein Vergleich mit der Figur in *φαινόμενα* 12 (Fig. 38) zeigt aber, dafs die Figur bei Theodosios astronomisch so aufzufassen ist: AEB, $\Delta H\Lambda$, $M\Theta N$ und ΞKO sind verschiedene Lagen des Horizontes, $\Lambda\Delta M\Xi$ ist der Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne, BZ der Äquator, EZ die Ekliptik, $H\Theta$ und ΘK gleiche Ekliptikbogen.

Zu beweisen ist die Ungleichheit der Äquatorbogen $\Lambda N > NO$.

Beweis: $\Sigma T > \Sigma\Pi$ (Theod. III, 7, vgl. oben), $\Sigma T = \Theta T$, $\Sigma\Pi = \Theta P$ (Theod. II, 13), also $\Theta T > \Theta P$. Sei nun $\Phi\Theta = \Theta P$, dann wird $HP = \Phi K$ (Theod. III, 3). Ziehe $X\Phi\Psi \fallingdotseq TTK$, so wird die Schnittlinie der Ebenen $X\Phi\Psi$ und $\Xi KO \fallingdotseq$ dem Durchmesser des Kreises ΞKO, also steht auf einer Sehne des Kreises ΞKO ein Segment $\Psi\Phi X$, gegen denjenigen

Bogen von ΞKO, der kleiner als ein Halbkreis ist, geneigt. Dann (Theod. III, 2) $\overline{\Phi\Psi} < \overline{\Phi K} = \overline{HP}$. Aus der Ungleichheit der Kreise X und ΠHP folgt die der darin liegenden Sehnen $\Phi\Psi$ und HP und $\smile HP > \Phi\Psi$; da aber $\smile HP \sim AN$ und $\smile \Phi\Psi \sim NO$, wird $\smile AN > NO$ q. e. d.

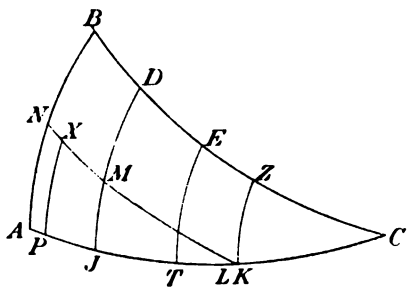
Der entsprechende Satz Menelaos II, 12[2] hat eine andere Figur (wo BA als Ekliptik, BC als Äquator, DAE als Wendekreis, TX, LU und MQ als verschiedene Lagen des Horizontes aufzufassen sind. Zu beweisen ist $\smile XR >$



Figur 41.

Es ist dies eine direkte F von Menelaos II, 6, 1. (Fig. 42), welcher sagt: Seien sphärischen Dreieck ABC: $< 90^0$, $90^0 \geqq BC$, $90^0 \geqq$ $\smile BD = EZ$, $\angle J = T = K =$ und seien DJ, ET und größte Kreisbogen. Beweise da $\smile AJ > TK$.

Beweis: Seien $\smile JL =$ und $\angle ALM = C$, so fällt N AB (Menel. II, 2). Dann $\smile MN > DB = EZ$ (Menel. I vgl. Seite 52). Seien ferner $\smile MX = EZ$ und $\angle XPC = A$, so (Menel. I, 14 oder 16) $\triangle PXL \simeq TEC$ und wir haben:



Figur 42.

$$\smile PL = CT$$
$$\therefore \underline{[\smile JL = KC]}$$
$$\smile AJ > PJ = TK$$

q. e. d.

— ——

Theodosios gebraucht also di seine Sätze III, 2, 3 und 7 und plicite III, 1 und 4; Menelaos gegen nur den Fundamentalsatz Me II, 3 und einen Kongruenzsatz des ersten Buches.

Der so bewiesene Satz, sowie das darin verborgene astronomische P blem hat eine überaus große Rolle gespielt. Wie viel für die Grie im Begriffe *„Auf- und Untergang der Sterne"* lag, wollen wir nicht erörtern. Es genügt, daran zu erinnern, daß es ganz einfach das Ha

problem der ganzen Astronomie bis auf Apollonios war. Es enthielt den Kern der alten Sphärik und bildete das astronomische Fundament der Astrologie. Hauptsächlich lenkten doch die Griechen ihre Untersuchungen auf drei Hauptpunkte, und zwar:

1. den gleichzeitigen Auf- und Untergang der Sterne[115]),
2. die Zeit, die die Konstellationen zum Auf- und Untergang gebrauchen[116]),
3. die Zeit, welche die Zwölfteteile der Ekliptik (die Tierzeichen) zum Auf und Untergang gebrauchen.

Letzteres Problem haben wir eben vor uns in den oben referierten identischen

---

115) Der gleichzeitige Auf- und Untergang der Sterne wurde in Eudoxos' und Aratos' *φαινόμενα* erörtert. Der Zweck dieser Erörterung war die Zeitbestimmung bei Nacht (vgl. Hipparchs *Kommentar zu Aratos,* p. 122, 5—7). Eine eingehende Kritik der älteren Behandlungen hat Hipparch in seinem *Kommentar* (ed. Manitius, p. 120—183) gegeben. Seine eigenen Resultate, die er in dem *Kommentar* nur durch kurze Zahlenbeispiele angiebt, sagt er, habe er in einem anderen Werk genau auseinandergesetzt, und zwar so, dafs er immer die Auf- und Untergänge der Sterne mit den gleichzeitigen Auf- und Untergängen der Punkte der Ekliptik vergleicht. Hipparchs Hinweisungen auf dieses verlorene Werk lauten: *Kommentar,* p. 128, 5: „*ἀποδεδείχαμεν γὰρ τὰ τοιαῦτα πάντα ἐν τοῖς περὶ τῶν συναναπολῶν.*“ — p. 148, 20: „*τὸν μὲν γὰρ ἐπὶ πλεῖον περὶ αὐτοῦ λόγον ἐν τῇ τῶν συναναπολῶν πραγματείᾳ κατακεχωρίκαμεν.*“ — p. 150, 14: „*ἕκαστον γὰρ τῶν εἰρημένων ἀποδείκνυται διὰ τῶν γραμμῶν ἐν ταῖς καθόλου περὶ τῶν τοιούτων ἡμῖν συντεταγμέναις πραγματείαις.*“ — In Ptolemaios' *Syntaxis* sind die gleichzeitigen Auf- und Untergänge der Fixsterne kurz behandelt worden in VIII cap. 5 mit der Überschrift: „*περὶ συναναπολῶν καὶ συμμεσουρανήσεων καὶ συγκαταδύσεων τῶν ἀπλανῶν*“, und zwar trigonometrisch; vgl. unten Seite 84—86 mit Noten.

116) In Hipparchs *Kommentar,* p. 183—270, ist es bei jedem Sternbild sowohl innerhalb als aufserhalb der Ekliptik angegeben (vgl. Manitius, p. XXXIII): 1. Mit welchen Zeichen des Tierkreises bezw. Graden der Ekliptik es gleichzeitig auf- und untergeht. — 2. Mit welchem Sterne der Auf- und Untergang beginnt und mit welchem er sein Ende erreicht. — 3. Welches Zeichen und welcher Grad der Ekliptik bei Anfang und Ende im Meridian steht. — 4. Welche Fixsterne bei Anfang und Ende von Aufgang bezw. Untergang kulminieren. — 5. In wieviel Stunden Auf- bezw. Untergang stattfindet. — Die Beweise für die in Hipparchs *Kommentar* nur als Resultate angegebenen Bestimmungen hat er in anderen Werken gegeben; denn er sagt p. 184, 2: „*τὰς δὲ κατὰ μέρος αὐτῶν ἀποδείξεις ἐν ἄλλοις συντετάχαμεν οὕτως, ὥστε ἐν παντὶ τόπῳ σχεδὸν τῆς οἰκουμένης δύνασθαι παρακολουθεῖν ταῖς διαφοραῖς τῶν συναναπολῶν καὶ συγκαταδύσεων.*“ Die Bestimmung der Zeit, in welcher die Sternbilder auf- und untergehen, ist theoretisch dieselbe wie die Bestimmung der Zeit, in welcher die Zwölfteteile der Ekliptik (die Tierzeichen) auf- und untergehen. Die Bestimmungen beziehen sich alle auf Stellen, wo die Polhöhe 36° ist.

Sätzen Euklid φαινόμενα 12 = Theodosios III, 8 = Menelaos II, 12[2], und auf seine Untersuchung werden wir uns hier beschränken.

Erst wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf einen Bericht in Pappos' συναγωγή[117]), wo die Geschichte dieses Problems behandelt wird. In Übersetzung lautet die Stelle so:

„Im 12. Theorem (der φαινόμενα) *sagt Euklid: 'Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs gehen in ungleichen Zeiten unter, und zwar in den gröfsten die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen, in den kleinsten aber die am Äquator, und in gleichen Zeiten die vom Äquator gleich weit entfernten.' Es ist unsicher, warum er vom Untergang dieser Bogen spricht, vom Aufgang dagegen nicht. Die Untersuchung entwickelte sich nämlich in Aufgangsbestimmungen, und es ist dies die ganze Sache: die Wohnung zu finden, wo z. B. der Krebs in gleicher Zeit aufgeht wie auch der Löwe. Hipparch aber zeigt im Buche über den Aufgang der zwölf Zeichen mit Zahlen*[118]*), dafs die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, die eine gegenseitige Zeitkomparation haben, nicht so aufgehen, wie sie untergehen; nämlich, dafs es gewisse Wohnungen giebt, wo immer die von den gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, welche dem Äquator am nächsten liegen, in längerer Zeit aufgehen, als die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen. Dadurch stellte er auch über die vom Äquator gleich weit entfernten fest, dafs ihre Aufgänge in gleichen Zeiten vorgehen.' Ebenso sagt er* (Euklid, φαινόμενα 13): *'Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Steinbock gehen in ungleichen Zeiten auf, und zwar in den längsten die an den Berührungspunkten* (d. h. Wendepunkten), *in kleineren aber die nächstfolgenden, in den kleinsten aber die am Äquator, in gleichen aber die vom Äquator gleich weit entfernten.' Über deren Untergang sagt er nichts. Die Art des Beweises bezieht sich nämlich auf die Aufgangsbestimmungen, und darüber ist ferner eine Abhandlung* [πραγματεία] *von dem Alexandriner Menelaos geschrieben, welche wir später untersuchen werden. Wenn aber der Horizont durch die Pole der Parallelkreise geht, soll es so bewiesen werden . . . . .*"

Diese in mehreren Beziehungen rätselhafte Stelle läfst sich nur erklären, wenn wir beachten, wie es sich in der That mit den Auf- und Untergangszeiten der Ekliptikbogen verhält. Es verhält sich so:

1. Die Zeichen, die symmetrisch in Bezug auf die Schnittlinie der Ekliptik- und der Äquatorialebene liegen, haben dieselben Auf- und Untergangszeiten.

117) Pappos, ed. Hultsch, p. 598—602.

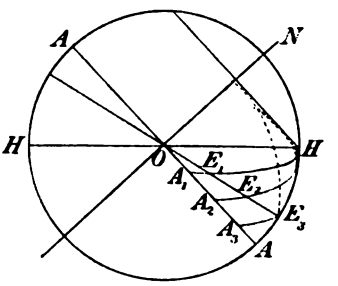
118) „Ἵππαρχος δὲ ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν ιβ' ζῳδίων ἀναφορᾶς συναποδείκνυσιν δι' ἀριθμῶν ὅτι . . . ."

2. Die Auf(Unter)gangszeit eines Zeichens ist gleich der Unter(Auf)-gangszeit des diametral entgegengesetzten.

3. Die Untergangszeiten der Zeichen des Halbkreises Krebs, Löwe bis Schütze und, was auf dasselbe herauskommt, die Aufgangszeiten der des Halbkreises Steinbock bis Zwillinge wachsen immer vom Äquator ab gegen die Wendekreise.

4. Dasselbe gilt auch für Wohnungen der Polarzonen, insofern die Tierzeichen überhaupt auf- und untergehen.

5. Die Untergangszeiten der Zeichen des Halbkreises Steinbock-Zwillinge und, was auf dasselbe herauskommt, die Aufgangszeiten der Zeichen des Halbkreises Krebs-Schütze haben für Wohnungen zwischen den Polarkreisen kein bestimmtes Wachstum vom Äquator aus oder gegen denselben.



Figur 43.

6. Dieselben Zeiten wachsen dagegen für Wohnungen der Polarzonen wiederum gegen die Wenden, insofern die Zeichen überhaupt auf- und untergehen.

7. Es besteht zwischen den Untergangszeiten (oder Aufgangszeiten) der in Bezug auf die Solstitialkolure symmetrischen Zeichen (z. B. Widder und Jungfrau, Stier und Löwe) eine Relation.

8. Es lassen sich also, wenn die Aufgangszeiten dreier Zeichen für eine bestimmte Wohnung gefunden sind, alle die Auf- und Untergangszeiten sämtlicher Zeichen für diese Wohnung finden.

Für den Fall 3 läfst sich das Wachstum in Bezug auf folgende Figur beweisen:

(Fig. 43) N Nordpol, AA Äquator, OE_3 Ekliptik, HH Horizont, $OE_1 = E_1E_2 = E_2E_3$ Tierkreiszeichen.

Stellen wir nun die Drehung der Erde durch eine entgegengesetzte Drehung des Horizontes dar, so wird, wenn wir die uns zugewandte Halbkugel betrachten,

$$\left.\begin{aligned} OE_1 &= \text{Widder} \\ E_1E_2 &= \text{Stier} \\ E_2E_3 &= \text{Zwillinge} \end{aligned}\right\} \text{im Aufgang.}$$

Wenn wir dagegen die uns abgewandte Halbkugel betrachten, so wird:

$$\left.\begin{aligned} OE_1 &= \text{Jungfrau} \\ E_1E_2 &= \text{Löwe} \\ E_2E_3 &= \text{Krebs} \end{aligned}\right\} \text{im Untergang.}$$

Die Auf- und Untergangszeiten messen wir auf dem Äquator und zwar werden sie für OE_1, E_1E_2, E_2E_3 bezw. OA_1, A_1A_2, A_2A_3.

Beweisen wir nun $OA_1 < A_1A_2 < A_2A_3$, so ist der Fall 3 erledigt Ein Vergleich zeigt sofort, dafs in *φαινόμενα* 12—13 eben dieser Beweis durch Theodosios III, 8 erledigt ist, und in der That können Theodosios III, 8 oder Menelaos II, 12[2] für die beiden im obigen Falle 3 erwähnten Problem (Untergang Krebs-Jungfrau und Aufgang Widder-Zwillinge) gelten.

Es ist nun zu beachten, dafs Euklid den Beweis des Falles 3 an den Untergang der Zeichen Krebs-Schütze knüpfte. Deswegen wandte man nach ihm zunächst seine Aufmerksamkeit auf die Aufgangszeiten derselben. So glauben wir, entstand der Unterschied zwischen Auf- und Untergangsbestimmungen [*διορισμοί ἀνατολικοί καὶ δυτικοί*], wie Pappos sagt, indem man unter letzteren den schon bewiesenen Fall 3, unter ersteren den Fall 5, wo man ein bestimmtes Wachstum nicht nachweisen konnte, verstand. Anders können wir nämlich Pappos' Worte nicht verstehen: *„Über den Untergang* (von den Zeichen Steinbock-Zwillinge) *sagt er nichts; die Art des Beweises bezieht sich nämlich auf die Aufgangsbestimmungen. ...“* Einen Beweis dafür, dafs das Interesse sich um die Aufgangsbestimmungen (Fall 5) sammelte, giebt uns Hypsikles' *ἀναφορικός*. Hypsikles' Annahme, dafs die Aufgangszeiten Widder-Jungfrau eine arithmetische Progression bilden, zeigt, dafs man für den Fall 5 im Gegensatz zu 3 ein Wachstum gegen den Äquator annahm, aber nicht beweisen konnte.[119])

Wollen wir Pappos glauben, gelang es erst Hipparch, den Fall der *διορισμοί ἀνατολικοί*, zu bewältigen und zwar *mit Zahlen*, d. h. *durch Berechnung*. Er bewies, dafs die Aufgangszeiten der Zeichen Krebs u. s. w. kein bestimmtes Wachstum haben, sodafs es Klimate giebt, wo z. B. Krebs und Löwe (vgl. Pappos) in gleicher Zeit aufgehen. Zur Berechnung dienten natürlich die Sehnenbestimmungen, die Hipparch nach Theon verfafst haben sollen. Hipparchs Berechnungen waren also wahrscheinlich trigonometrisch, und da wir später, wie wir glauben, nachweisen können, dafs Hipparch dieselben trigonometrischen, sowohl ebenen als sphärischen Mittel zur Verfügung hatte, die Ptolemaios gebraucht, wird es demnächst zu untersuchen sein, wie Ptolemaios diese Aufgangszeiten behandelte.

119) Den Inhalt von Hypsikles' Werk werden wir nicht näher erörtern, weil wir doch aus diesem Inhalt keine Schlüsse ziehen können in Bezug auf den damaligen Zustand der Astronomie bezw. Trigonometrie. Der Herausgeber des *ἀναφορικός* hat nämlich sehr klar nachgewiesen, dafs die in diesem Werke angewandte Methode auch *nach* der Erfindung der Trigonometrie zur Berechnung von Nativitäten gebraucht wurde. Aufserdem ist es nicht genau festgestellt, ob mehr als die mathematische Einleitung des *ἀναφορικός* dem Hypsikles zuzuschreiben ist

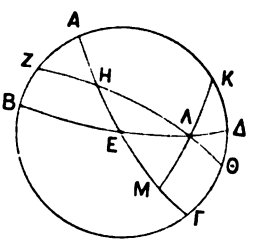
Deshalb referieren wir Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 7 (ed. Heiberg I, p. 121; ed. Halma I, p. 92)[120]:

Seien (Figur 44) $E\Delta$ der Horizont, $H\Delta$ die Ekliptik, $E\Gamma$ der Äquator, K der Nordpol, H der Nullpunkt des Widders, Δ der des Stiers, sodafs also $H\Delta$ das Zeichen des Widders ist; dann giebt der Satz des Menelaos (*Sphärik* III, 1):

$$\frac{\sin K\Delta}{\sin \Delta\Gamma} = \frac{\sin KA}{\sin AM} \cdot \frac{\sin ME}{\sin E\Gamma}$$

(Dreieck $KM\Gamma$ durch den Bogen $EA\Delta$ geschnitten).

Bekannt ist hier die Polhöhe (für Rhodos, wo der längste Tag $14^1/_2$ Stunden dauert) $K\Delta = 36^0$, ihr Komplement $\Delta\Gamma = 54^0$, die Deklination $\Delta M = 11^0 39' 30''$ (gefunden in der Deklinationstafel, Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 15), ihr Komplement $KA = 78^0 20' 30''$ und $E\Gamma = 90^0$. Mit Hülfe der Sehnentafel wird dann der unbekannte Bogen $ME = 8^0 38'$ bestimmt. MH, die der ekliptischen Länge $H\Delta$ entsprechende Rektascension ist $27^0 50'$ (gefunden in der Rektascensionstafel, Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 8). Schliefslich wird also $\cup HE = HM \dot{-} EM = 19^0 12'$.



Figur 44.

HE ist aber das Mafs der Aufgangszeit des Bogens $H\Delta$, d. h. des Zeichens des Widders, sodafs Ptolemaios hier ein Rechnungsbeispiel der trigonometrischen Behandlung des alten Problems giebt.

Die den Tierzeichen entsprechenden Aufgangsbogen auf dem Äquator nennt Ptolemaios (*συν*)*αναφοραί*; wir nennen sie Obliquascensionsdifferenzen; über diese Bogen hat Ptolemaios eine grofse Tafel berechnet, die er der Rektascensionstafel hinzufügt. Die Tafel[121] giebt sowohl die Obliquascensionen als ihre Differenzen für Wohnungen, wo der längste Tag eine Dauer von $12^1/_2$, 13 u. s. w. bis zu 17 Stunden hat, und zwar für je 10^0 der Ekliptik.

Wir müssen nach Pappos' und Hipparchs eigenen Aussagen vermuten, dafs letzterer in „*περὶ τῆς τῶν ιβ′ ζῳδίων ἀναφορᾶς*“[122] auch eine Obliquascensionstafel berechnet hat, und aus drei Gründen nehme ich an, dafs das oben zitierte Rechnungsbeispiel aus Ptolemaios' *Syntaxis* direkt von Hipparch stammt.

---

120) Die Überschrift dieses Kapitels ist: „*περὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἐγκεκλιμένης σφαίρας τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ συναναφορῶν.*“

121) Die Überschrift dieser Tafel ist: „*Κανόνιον τῶν κατὰ δεκαμοιρίαν ἀναφορῶν.*“

122) Vgl. Note 118.

1. Das Beispiel wendet die Polhöhe für Rhodos an, die Hipparch immer benutzte.

2. Ptolemaios' Tafel ist für je 10^0 der Ekliptik berechnet, während das zitierte Rechnungsbeispiel und die danach im folgenden von Ptolemaios näher dargelegte Methode für je 30^0 der Ekliptik, also für die Tierzeichen berechnet sind.

3. Dagegen läfst Ptolemaios eine andere trigonometrische Methode dieser Berechnung folgen, und diese zweite Methode, die er als *„leichter und methodischer"* (*εὐχρηστότερον καὶ μεθοδικώτερον*) bezeichnet, erklärt er durch Beispiele, die übereinstimmend mit der Tafel für Ekliptikbogen von je 10^0 gelten.

Wir werden kaum fehlen, wenn wir die erste Methode die *Hipparchsche*, die zweite die *Ptolemaiische* nennen.[123])

Ist aber diese Ansicht richtig, so folgern wir daraus, dafs Hipparchs Obliquascensionstafel wahrscheinlich nur für Zwölfteteile der Ekliptik, für die *ζῳδία* berechnet war. Auch sonst scheint mir dies das wahrscheinlichste; denn Pappos sagt ja, dafs Hipparch bewiesen hat, dafs es Wohnungen gebe, wo immer die Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, welche dem Äquator am nächsten liegen, in längerer Zeit aufgehen, als die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen. Allerdings sind Pappos' Worte zweideutig; denn es geht nicht deutlich hervor, ob er hiermit „einen kontinuierten Zuwachs" gegen den Äquator meint, oder ob er nur einzelne Bogen von gewisser gleicher Gröfse meint. Im ersteren Falle stimmt die Bemerkung weder mit Ptolemaios' Tafel noch mit der Wirklichkeit. Im letzteren Falle stimmen Pappos' Worte auch nicht mit Ptolemaios' Tafel über die 36stel der Ekliptik. Dagegen können sie vielleicht mit einer Tafel über die Aufgangszeiten der Zwölfteteile stimmen.

Summieren wir nämlich die 36stel im Ptolemaios, so bekommen wir:

---

123) Delambre, *l'astronomie ancienne* I, p. 142 ff., hat geschlossen, dafs Hipparch trigonometrische Methoden besafs, und zwar aus dem Inhalt des *Kommentars zu Aratos* und den darin enthaltenen Hinweisungen auf die verlorenen Werke (vgl. Note 115 u. 116). In der That ist es kaum möglich, dafs Hipparch ohne Anwendung einer trigonometrischen Methode (vgl. doch Tannery, *La géométrie grecque*, p. 58) die Bestimmung der Zeit, in welcher die Konstellationen und die Zwölfteteile der Ekliptik auf- und untergehen, erledigen konnte. Im folgenden Kapitel werden wir näher erörtern, wie diese Methode war, oder vielmehr, dafs es wahrscheinlich dieselbe war, die wir auch in der *Syntaxis* finden. Wir werden ferner nachweisen, dafs Hipparch aller Wahrscheinlichkeit nach auch die von Ptolemaios benutzten trigonometrischen Mittel besafs; vgl. unten Seite 84 ff., 99 und 125 ff.

Zeichen des Tierkreises.	Obliquascensionsdifferenzen für Polhöhe $\varphi =$		
	$48^0 32'$	$51^0 30'$	$54^0 1'$
Krebs	$37^0 15'$	$38^0 0'$	$38^0 47'$
Löwe	$41^0 25'$	$42^0 53'$	$44^0 22'$
Jungfrau	$41^0 20'$	$42^0 52'$	$44^0 21'$

Wenn die Polhöhe $\varphi = 52^0 30'$ mitgenommen wäre, würde Ptolemaios für Löwe und Jungfrau gleiche Werte bekommen haben, und es ist immerhin möglich, daſs Hipparch, dessen Sehnentafel wohl kaum so genau war, wie die des Ptolemaios, für eine Polhöhe in der Nähe von $52^0 30'$ einen kontinuierten Zuwachs der Aufgangszeiten der *Tierzeichen* gegen den Äquator erhalten hat. Da Pappos' Worte indessen unklar sind und die *Kommentare* zu Aratos zeigen, daſs Hipparch sehr viele Aufgangsberechnungen (wenigstens über die Konstellationen) erledigt hat, und also mit solchen vertraut war, bleibt die Sachlage immerhin unsicher.

Eine andere Frage ist, ob Hipparchs Obliquascensionstafel, was die Klimate betrifft, eine weitere Ausdehnung als die des Ptolemaios hatte. In der Obliquascensionstafel giebt Ptolemaios (vgl. oben) nur die Klimate bis 54^0 an; in II, cap. 6 dagegen rechnet er alle Klimate bis zum Nordpol auf. Diese Klimate, die immer nach der Dauer des längsten Tages geordnet sind, wurden schon von Eratosthenes angegeben und nach ihm in der griechischen Geographie und Astronomie allgemein verwendet.

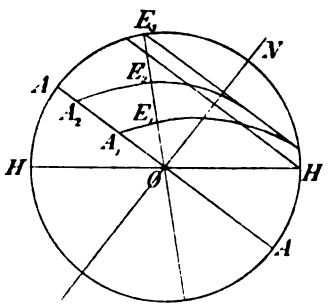
Pappos' Bericht über Hipparchs Aufgangsbestimmungen enthielt aber den Passus: *„insofern diese* (die Tierzeichen) *eine gegenseitige Zeitkomparation haben."* Dies kann man wohl nur so verstehen, daſs Hipparch auch Aufgangsberechnungen für Wohnungen der Polarzonen gemacht hat, wo ja die Ekliptik nur teilweise auf- und untergeht.

Zum Vergleich zitieren wir aus Hipparchs *Kommentaren* folgende Stelle: *„Im Folgenden werde ich für jedes Sternbild in übersichtlicher Weise darstellen, mit welchem der 12 Tierzeichen es gleichzeitig auf- und untergeht, d. h. von welchem Grade des Zeichens an bis zu welchem als Endpunkt es aufgeht, bezw. untergeht, in den Gegenden von Griechenland, wo der längste Tag $14^1/_2$ Stunden lang ist* [d. h. $\varphi = 36^0$]. *Die speziellen Beweise hierfür haben wir anderen Ortes derartig zusammengestellt, daſs man fast für jeden Ort der bewohnten Erde die Unterschiede der gleichzeitigen Auf- und Untergänge verfolgen kann."*[124])

124) Vgl. Note 116.

Zur Ergänzung dient eine Mitteilung von Strabo[125]): *„Hipparch hat, wie er selbst versichert, die in den Phainomena eintretenden Veränderungen für alle Orte der Erde, welche in dem von uns bewohnten Viertel liegen, aufgezeichnet und zwar vom Äquator bis zum Nordpol."*

Wie dem auch sei, so hat Menelaos die Aufgänge (oder Untergänge) für die Polarzonen behandelt, und zwar in der *Sphärik* II, 13. Es dürfte dies eine indirekte Bestätigung davon sein, dafs Hipparchs Berechnungen sich auf *alle* die Klimate des Eratosthenes erstrecken.



Figur 45.

Wie wir oben den Fall 3 darstellten, so können wir es auch mit dem Falle 6 thun:

Sei nämlich (Figur 45) N Nordpol, AA Äquator, OE_3 Ekliptik, HH Horizont, $OE_1 = E_1E_2$ Tierzeichen (das dritte Zeichen E_2E_3 ragt über den Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne hinaus). Stellen wir wieder die Erddrehung durch eine entgegengesetzte Drehung des Horizontes dar, so wird, wenn wir die uns zugewandte Halbkugel betrachten:

$$\left.\begin{matrix} OE_1 = \text{Jungfrau} \\ E_1E_2 = \text{Löwe} \end{matrix}\right\} \text{im Aufgang.}$$

Betrachten wir dagegen die uns abgewandte Halbkugel, so wird:

$$\left.\begin{matrix} OE_1 = \text{Widder} \\ E_1E_2 = \text{Stier} \end{matrix}\right\} \text{im Untergang.}$$

In Menelaos II, 13 wird es nun, allerdings ohne Anwendung von astronomischen Bezeichnungen, bewiesen, dafs $OA_1 < A_1A_2$, d. h. in den Polarzonen wachsen die Aufgangszeiten der Zeichen Krebs-Schütze, d. h. die Untergangszeiten der Zeichen Steinbock-Zwillinge, insofern die betreffenden Zeichen überhaupt auf- und untergehen, gegen die Wenden, d. h. Fall 6.

Menelaos' Beweis ist dem des Falles 3 (vgl. oben Seite 71) analog. Berechnungen kommen hier ebenso wenig wie im trigonometrischen Teile von Menelaos' *Sphärik* vor.

In der vorhergehenden Untersuchung haben wir nicht auf Hypsikles' ἀναφορικός Rücksicht genommen, und zwar weil dieses Werk nur für die Beurteilung der Erfindung der Trigonometrie Wert haben kann, wenn es wirklich dem Hypsikles zuzuschreiben ist, was ja Manitius bezweifelt. Wenn aufserdem Manitius, wie es mir scheint, darin Recht hat, dafs es lediglich astrologische Zwecke verfolgt, und auch *nach* der Erfindung der

125) Strabon, *Geographie* II, cap. 5, § 34.

Trigonometrie zu astrologischen Bestimmungen verwendet wurde[126]), so hat es in der That für uns sehr wenig Interesse darüber hinaus, dafs es Aufgangsbestimmungen und nicht Untergangsbestimmungen (wie Euklids *φαινόμενα*) enthält.

Die Frage: „Was hat denn eigentlich Menelaos in der von Pappos erwähnten astronomischen Abhandlung geleistet?" kommt nun an die Reihe.

Die Fälle 1—3 waren in Euklids *φαινόμενα* schon vollständig erledigt, und zwar Fall 2 in *φαιν.* 11, Fall 3 in *φαιν.* 12—13 und Fall 1 in *φαιν.* 14. Sie dürften schon lange vor Euklid bekannt gewesen sein; denn die abgeleiteten sphärischen Sätze standen alle in der alten Sphärik. Ferner scheint Hipparch *alle* Aufgangsbestimmungen erledigt zu haben, und dafs er die Relationen zwischen Auf- und Untergangsbestimmungen erkannt hat, dafür bürgt uns sein *Kommentar* sowie verschiedene Stellen in Geminos' *εἰσαγωγή*[127]) (Geminos ist älter als Menelaos). Es ist auch ganz undenkbar, dafs er, wenn er eine Obliquascensionstafel berechnet hat, nicht die Relation zwischen den Obliquascensionen der in Bezug auf die Solstitialkolure symmetrischen Zeichen erkannt hat (Ptolemaios beweist diese Relation II, cap. 7).[128]) Kurz, alle Fälle 1—8, die ganze Sachlage, müssen schon dem Hipparch bekannt gewesen sein, sodafs Menelaos' Arbeit jedenfalls nur eine Epigonenarbeit gewesen sein kann. In welchen Beziehungen sie also Hipparchs Werke vervollständigt oder verbessert hat, wie viele ihrer Details sich im Ptolemaios finden,[129]) können wir nicht entscheiden, auch nicht, ob das Werk rechnerisch durchgeführt oder vielmehr ein Versuch war, die von den Berechnungen bekannten Thatsachen mathematisch (im griechischen Sinne des Wortes) zu beweisen. Letzteres ist nämlich immerhin möglich. Menelaos' zweites Buch, letzter Teil des dritten und Pappos' *Kommentare*[130]) zu Euklids *φαινόμενα* beweisen uns zum Überflufs, dafs die

126) Vgl. Note 119.

127) Geminos' *Isagoge,* ed. Manitius, Leipzig 1898, p. 19 ff. und 86—98. Bei Geminos wird auch die Bedeutung der Auf- und Untergänge der Zeichen für Nativitätenberechnungen und Wetterprophezeiungen kurz erwähnt.

128) Die Summe der Aufgangszeiten zweier solcher Zeichen, wie z. B. Widder und Jungfrau, ist gleich der Summe der den Zeichen entsprechenden Äquatorbogen.

129) Den obigen Fall 1, dafs Zeichen wie Widder und Fische, Stier und Wassermann gleiche Aufgangszeiten haben, beweist Ptolemaios (*Synt.* II, cap. 7, ed. Heiberg I, p. 118) durch Menelaos I, 4.

130) Pappos VI, propp. 57 ff., ed. Hultsch, p. 604—632. Pappos giebt hier im Anschlufs an den oben zitierten geschichtlichen Bericht eine Reihe weitläufiger untrigonometrischer Sätze über die Aufgangszeiten der Tierzeichen. Er schliefst mit einer Hinweisung auf Ptolemaios' *Syntaxis.* Dieser Kommentar des Pappos ist ganz wertlos. Es liegt die Möglichkeit vor, dafs wir hier wenigstens teilweise die versprochenen Auszüge aus Menelaos' Abhandlung vor uns haben,

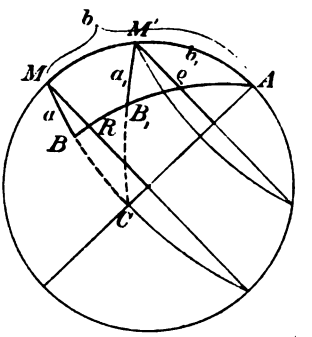
alte Behandlungsmethode auch *nach* Hipparch fortdauerte, und dafs die Bemühungen, eine ideale mathematische (d. h. unrechnerische und exakte) Darstellung der astronomischen Probleme zu erreichen, noch Jahrhunderte lang umgangen. Solche Irrsprossen zu untersuchen, hat aber für uns kein Interesse und für die Geschichte der Astronomie keinen Wert. Für uns galt es nur, durch den an sich unbedeutenden Inhalt des zweiten Buches der *Sphärik* veranlafst, die Geschichte solcher Probleme darzustellen, die die Entwickelungsmöglichkeiten in sich trugen. Und das Obliquascensionsproblem, das A und Z der vortrigonometrischen Astronomie und Sphärik, das aufserdem zu allerlei, z. B. Orientierung, Zeitbestimmung, Wetterprophezeihungen und Astrologie verwendet wurde, trug eben die Entwickelungsmöglichkeiten in sich. Es erzwang die sphärische Trigonometrie, es zwang die Griechen, ihre Vorurteile gegen annähernde Berechnungen als etwas in der hohen, exakten Mathematik Unzulässiges über Bord zu werfen; denn sie sahen, dafs sie mit diesem praktischen Problem ohne Berechnung nicht aus der Stelle kamen.

Wir erwähnten oben, dafs Ptolemaios zur Berechnung der Obliquascensionen sich auf Deklinations- und Rektascensionstafeln für die Ekliptikpunkte stützte. Finden wir, wie bei der Obliquascensionstafel, in der Astronomie oder Sphärik vor Hipparch Sätze, die sich in solche Tafeln haben entwickeln können? Diese Frage müssen wir mit „nein" beantworten. Theodosios III, 5 ist eine mathematische Umschreibung des astronomischen Satzes: *„Die Deklinationen der Ekliptikpunkte wachsen den ekliptischen Längen nicht proportional."* Ebenso ist Theodosios III, 6 eine Umschreibung des Satzes: *„Die Rektascensionen wachsen den ekliptischen Längen mehr als proportional."* In Menelaos II, 10 sind diese Sätze neu bewiesen, und an dieselben knüpfte sich, wie wir sahen, Pappos' *Kommentar* zu Theodosios, während er den *Kommentar* über die Obliquascensionen an Euklids *φαινόμενα* anknüpfte. Bedeutet dies vielleicht, dafs diese Sätze erst von Theodosios oder wenigstens nach Euklid erfunden sind? Wir haben ja die Existenz dieser Sätze in der *alten Sphärik* nicht feststellen können. Also liegt immer die Möglichkeit vor, dafs sie erst von Hipparch oder Theodosios erfunden sind, in beiden Fällen wohl zuerst in Form zweier Tafeln, denen ähnlich, die wir im Ptolemaios finden, dann später im Sinne der *alten Sphärik* umgebildet, um in die Neuausgabe derselben eingefügt zu werden. Dann wären diese Sätze zuerst als Hülfsmittel zur Berechnung der Obliquascensionen entstanden.

In der That ist dies nun unwahrscheinlich. Schon um das Jahr 283 v. Chr. bestimmte Timocharis die Lage der Fixsterne durch Deklinationen und

obwohl ich lieber annehme, dafs letztere trigonometrisch war; vgl. unten Seite 116, Note 197.

Rektascensionen oder, was auf dasselbe herauskommt, Stundenwinkel (vgl. Ptolemaios' *Syntaxis* VII, cap. 3)[131]; die dazu notwendigen Instrumente, die sogen. Armillen, waren aufserdem zur Zeit des Eratosthenes schon lange bekannt.[132] Zudem dürften sich so viele Probleme der Sonnenbewegung an die Deklinationen und Rektascensionen der Ekliptikpunkte geknüpft haben, dafs die Untersuchung des Wachstums dieser Bogen sich sehr früh aufdrängen mufste. Es beruht wohl also lediglich auf einem Zufall, dafs wir die Existenz von Theodosios III, 5—6 in der *alten Sphärik* nicht beweisen können. Jedenfalls liegen sie ganz innerhalb des Bereichs der *voreuklidischen Sphärik*, die Beweismittel (Theodosios I, 6, 15; II, 10; III, 1, 3, 4) waren vorhanden, und die Sätze sind den Obliquascension und Abendweite behandelnden (*φαιν.* 8 u. 12) ganz ähnlich.



Figur 46.

Die Erweiterungen von Theodosios III, 5—6, nämlich III, 9—10 haben kein Interesse, umsomehr aber Theodosios III, 11.

Kurz abgefafst sagt dieser Satz: Wenn der Punkt B (Figur 46) ganz beliebig zwischen C und M gewählt ist, so wird:

$$\frac{2R}{2\varrho} > \frac{a}{a_1}.$$

Bemerken wir aber, dafs $R = \sin 90^0 = \sin b$, $\varrho = \sin b_1$, so sind wir schon dem Sinussatze für rechtwinklige Dreiecke:

$$\frac{\sin b}{\sin b_1} = \frac{\sin a}{\sin a_1} > \frac{a}{a_1}$$ [133]

ganz nahe. Diesen Satz treffen wir aber in Menelaos' *Sphärik* III, 2.

Wir sehen also, dafs Theodosios seine Aufmerksamkeit auf die Figur AB_1BMM_1 lenkte. Bedenkt man aber, dafs $\angle\ 90^0 - b_1 = b - b_1 = C$, so haben wir die Figur AB_1CBMM_1A, d. h. die Figur des Satzes des Menelaos. Kurz, wir spüren hier die Trigonometrie, etwas Neues, wovon wir in der alten Sphärik keine Spuren fanden, nämlich eine Bestrebung, die Verhältnisse der Bogengröfse mit denen gerader Linien zu vergleichen.

131) Ptolemaios' *Syntaxis*, ed. Halma II, p. 14—20.

132) Vgl. Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 74—76 und R. Wolf, *Gesch. der Astron.*, p. 130.

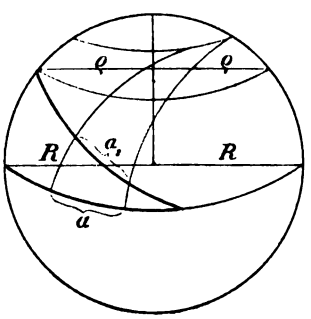
133) Theodosios' Beweis ist ganz elementar-stereometrisch und wird durch einen uralten, schon in Euklids *Optik* bewiesenen Satz (vgl. unten Seite 114) erledigt. Dieser Satz kommt dem unsrigen: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ für $\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta$ gleich. Dafs $\sin a : \sin a_1 < a : a_1$, wenn nur $a > a_1$, war schon Aristarch bekannt (vgl. unten Seite 114).

In diesem Satze wird das Verhältnis zwischen dem beliebigen Ekliptikboge und der entsprechenden Rektascensionsdifferenz mit einem Durchmesserver hältnis verglichen, im folgenden (Theodosios III, 12) das Verhältnis zwi schen dem Ekliptikbogen und der entsprechenden Obliquascensionsdifferenz Kurz abgefafst sagt nämlich Theodosios III, 12 (Figur 47):

$$\frac{4R}{2\varrho} > \frac{a}{a_1},$$

wo natürlich a als die a_1 entsprechende Obliquascensionsdifferenz aufgefafs werden mufs.

Eine Bestätigung dafür, dafs wir hier einen Punkt berühren, der mi der Trigonometrie historisch in gewisser Verbindung steht, finden wir i Menelaos' drittem Buch. Da wird nämlich der erste dieser zwei Sätz (Theodosios III, 11) *trigonometrisch* bewiesen. Wie alt sind aber di Sätze? In der *alten Sphärik* erstens standen sie sicher nicht. Dagege wäre es sehr natürlich anzunehmen, dafs Theodosios sie aus irgend einer trigonometrischen Werk abgeleitet und seine Neuausgabe der *alten Sphärik* hinzugefügt habe Es scheint aber, dafs Theodosios auch nich auf diese Sätze Anspruch hat; denn nach de Gerhardschen Übersetzung von Menelaos *Sphärik* schreibt dieser wenigstens den erste dem Apollonios zu.[134]) Ist diese Überliefe rung richtig, und aus inneren Gründen könne wir keinen Einwand dagegen anführen, s sind die Sätze nicht von der schon erfundene Trigonometrie abgeleitet, sondern stehen viel mehr mit ihrer Erfindung in der innigsten Verbindung und bezeichnen wahr scheinlich die ersten, tastenden Versuche, Bogenverhältnisse auf der Kugelober fläche mit Verhältnissen gerader Linien zu vergleichen. Ja! wenn wir beachter dafs die Sätze offenbar aus der Beschäftigung mit dem Rektascensions- un Obliquascensionsproblem entstanden, und dafs man, während des Studium der vortrigonometrischen Behandlungen dieser Probleme, wieder und wiede auf eben die Figuren stöfst, die wir in den drei sphärisch-trigonometrische Hauptsätzen in Menelaos' drittem Buch kennen lernen werden, so ge winnt die Vermutung an Wahrscheinlichkeit, dafs die Erfindung der Trigono metrie, wenigstens der sphärischen, am Ende auf derartigen Figurenbetrach tungen beruht, zu denen die Bestrebung, die widerspenstigen Obliquascensione zu bewältigen, Anlafs gab.



Figur 47.

134) Vgl. unten Seite 117.

Sechstes Kapitel.

Menelaos' drittes Buch und die sphärische Trigonometrie.

a. Überblick über unsere Kenntnisse der griechischen Trigonometrie.

Bevor wir zur Behandlung von Menelaos' drittem Buch übergehen, wollen wir einige Bemerkungen vorausschicken über die Kenntnis der Trigonometrie der Griechen, die man ohne Rücksicht auf Menelaos' *Sphärik* erworben hat.

Die genauesten Untersuchungen über die Trigonometrie der Alten stammen von Delambre und v. Braunmühl.[135]) Delambres Darstellung ist jedoch mit Vorsicht zu benutzen, weil er die alten und die modernen Methoden so in einander mengt, dafs man schwer herausbringt, was ihm selbst und was den Alten gehört.

Sonst hat man sich meistens mit den Kenntnissen, die sich Ptolemaios' *Syntaxis* entnehmen lassen, zufrieden gestellt; mit Recht hebt aber Tannery[136]) hervor, dafs man mit Ptolemaios als einziger Quelle ein sehr unsicheres Bild von der alten Trigonometrie bekommt, und v. Braunmühl[137]), dafs wir an Menelaos' drittem Buch eine Quelle besitzen, die bisher nicht in der wünschenswerten Weise gewürdigt wurde.

Ein kühnes Bild der Erfindung und stufenweisen Entwickelung der Trigonometrie ist von Tannery[138]) entworfen. Leider hat er doch Menelaos' drittes Buch ganz aufser Acht gelassen. Es ist dies um so mehr zu bedauern, weil er, mit seiner beneidenswerten Fähigkeit, die geschichtlichen Vorgänge auch da zu ahnen, wo die Urkunden fehlen, durch eine genaue Untersuchung von Menelaos' *Sphärik* mit so gutem Material wäre versehen worden, dafs er sicher, die Entwickelungsgeschichte der Trigonometrie vor Menelaos ganz klar zu legen, vermocht hätte.

Da wir in der folgenden Untersuchung öfters auf Ptolemaios' *Syntaxis* hinweisen müssen, werden wir gleich die trigonometrischen Grundformeln, die sich in diesem Werke finden, anführen.

---

135) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* 1—2; v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I.

136) Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 305.

137) v. Braunmühl, l. c. I, p. 15. 138) Tannery, l. c. p. 67—68.

Zur Berechnung der Sehnentafel dienen folgende Sätze aus der Trigonometrie der Ebene, die wir in die uns geläufige Formelsprache übertragen haben[139]):

1. crd. x = crd. $(360^0 \div x)$ entspricht unserer Formel $\sin a = \sin(\pi \div a)$.
2. crd.^{2} x + crd.^{2} $(180^0 \div x) = 4r^2$ entspricht unserer Formel $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.
3. der sogenannte Satz des Ptolemaios:

$$\text{crd. } a \cdot \text{crd. } (c \div b) = \text{crd. } c \cdot \text{crd. } (a \div b) + \text{crd. } b \cdot \text{crd. } (c \div a).$$

4. $\text{crd. } \frac{a}{2} = \sqrt{r\,[2r \div \text{crd. } (180^0 \div a)]}$, entspricht unserer Formel:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 \div \cos x}{2}}.$$

5. Wenn $a > b$, wird $\frac{\text{crd. } a}{\text{crd. } b} < \frac{a}{b}$.

Einzelne andere Beispiele der Methoden zur Auflösung ebener Dreiecke geben uns Tannery (l. c. p. 305) und v. Braunmühl (l. c. p. 23 und 27), und zwar immer nach der *Syntaxis*.

Mit Hülfe von Menelaos' Satz (*Sphärik* III, 1) wird im Ptolemaios eine Reihe sphärisch-astronomischer Berechnungen erledigt. Darin finden wir *implicite* — denn es wird als trigonometrische Funktion ausschliefslich die Sehne des doppelten Bogens (ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν) verwendet, und sin 90^0, d. h. $\frac{1}{2}$ crd. 180^0 wird nicht als Einheit genommen, sondern gleich r oder 60^{partes} gesetzt — folgende sphärisch-trigonometrische Formeln, die sich alle auf das bei A rechtwinklige Dreieck ABC beziehen[140]):

(I) $\sin c = \sin a \sin C$

(II) $\text{tg } c = \sin b \text{ tg } C$

(III) $\cos a = \cos c \cos b$

(IV) $\text{tg } b = \text{tg } a \cos C$.

Es fehlen die wahrscheinlich erst bei den Arabern entdeckten Grundformeln:

(V) $\cos C = \cos c \cdot \sin B$

(VI) $\cos a = \cot C \cdot \cot B$.

Auch in anderen Werken von Ptolemaios bekommen wir Aufschlüsse über die griechischen Berechnungsmethoden.

---

139) Vgl. Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 19—22.

140) Vgl. wieder Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 24—25.

In einer sehr genauen Untersuchung hat Delambre[141]) nachgewiesen, dafs dieselben sphärisch-astronomischen Probleme, die in der *Syntaxis* gelöst wurden, in einem nur in lateinischer Übersetzung überlieferten Werke mit dem Titel *„Planisphärium"* erledigt sind. Die darin angewandten Methoden beruhen auf der nach Delambre schon Hipparch genau bekannten *stereographischen Projektion.*[141a]) Leider sind wir genötigt, die Planisphären aus unseren Untersuchungen auszuschliefsen.

Auch Delambre[142]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dafs in Ptolemaios' Schrift *περὶ ἀναλήμματος*[143]) eine Methode zur Verfertigung von Sonnenuhren vorkommt, die einer trigonometrischen gleichkommt.

Diese Methode besteht in der Orthogonalprojektion der Kugel auf drei zu einander senkrechte Ebenen, den Meridian, den Horizont und den Vertikalkreis. v. Braunmühl[144]) hat sie als eine rein graphische Methode auffassen wollen. Wir geben gern zu, dafs dieselbe anfangs rein graphisch gewesen ist, müssen aber Zeuthen[145]) darin Recht geben, dafs sie sich in Ptolemaios' Werk in eine *trigonometrische* entwickelt hat. Es werden nämlich die zu bestimmenden Gröfsen, sobald nur die Mittel zu ihrer Berechnung da sind, bereits als *δεδομένα* (gegebene) bezeichnet, womit auf die Möglichkeit einer Berechnung mit Hülfe der Sehnentafel hingewiesen wird. Unten werden wir nach Zeuthen ein Beispiel von der Auflösung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks angeben, das auf diese Weise erledigt ist.

Vorerst müssen wir aber einige Bemerkungen einschalten:

Wie Zeuthen meinen wir, dafs es unberechtigt ist, in Hipparchs Worten: *„διὰ τῶν γραμμῶν"*[146]) eine Anspielung auf eine rein graphische Methode erblicken zu wollen. Wenn aber Zeuthen in der Bestimmung des Tagebogens eines Fixsterns im *Analemma* (ed. Heiberg p. 18)[147])

141) Delambre, l. c. II, p. 433—457.

141a) Tannery, l. c. p. 50—55, meint, dafs die Erfindung der stereographischen Projektion bis auf Apollonios zurückgeht, dafs aber die damit verbundene *trigonometrische* Methode dem Ptolemaios gehört.

142) Delambre, l. c. II, p. 458—503.

143) Ediert von F. Commandinus (lateinisch) 1562. Die lateinische Übersetzung hat Heiberg mit einem griechischen Mailänder-Palimpsest verglichen, Zeitschr. f. Math. u. Physik **40**, Supplement, p. 1—30.

144) v. Braunmühl, l. c. p. 10—13.

145) Zeuthen, *Note sur la trigonométrie de l'antiquité,* Bibl. math. 1900, p. 20—27.

146) Hipparchi *Commentaria,* ed. Manitius, p. 150, 4; vgl. oben Seite 69, Note 115.

147) Diese Bestimmung des Tagebogens (2α) durch die Deklination (δ) und die Polhöhe (φ) kommt der durch die Formel $\cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ gleich; vgl. Zeuthen, l. c. p. 26.

genau die Methode, auf die Hipparch in seinem *Kommentar* hinweist, zu finden glaubt, so schiefst er mit dieser Schlufsfolgerung doch über das Ziel hinaus.

Was die verhängnisvollen Worte: „*διὰ τῶν γραμμῶν*“ betrifft, so dürften sie eine noch allgemeinere Bedeutung haben, als sowohl v. Braunmühl als Zeuthen annimmt. Sie beziehen sich nämlich auf *jede geometrische Methode* oder *Darstellung durch Figuren* im Gegensatz zu anderen Methoden, wie z. B. instrumentalen oder rein rechnerischen. Als Beleg kann folgendes dienen: Während diese oder gleichbedeutende Worte in Ptolemaios' *Syntaxis* (ed. Heiberg I, p. 31, 5 und 32, 1) und in Theons *Kommentar* (Baseler-ausgabe p. 39, 15 und 22) offenbar auf die geometrischen Hülfssätze zur Berechnung der Sehnentafel gehen, so beziehen sie sich in Ptolemaios' *Analemma* (p. 15) auf die geometrische Orthogonalprojektion im Gegensatz zu einer rein instrumentalen Methode.

In Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 9 (ed. Heiberg I, p. 142, 6)[148] und VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104, 19)[149] und VIII, cap. 6 (ed. Halma II, p. 108, 6 und 110, 15) gehen aber dieselben Worte *διὰ τῶν γραμμῶν* oder *γραμμικῶν δείξεων* auf die *σφαιρικαὶ δείξεις*, d. h. auf die Anwendungen von Menelaos' Satz zur Lösung sphärisch-astronomischer Probleme durch Figurenbetrachtung und Berechnung. Nun gehen aber die beiden ersteren aus der *Syntaxis* hier zitierten Stellen auf den Inhalt der Kapitel „*περὶ τῶν τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ συναναφορῶν*“ und „*περὶ συναναπολῶν* etc. . . . *τῶν ἀπλανῶν*“, d. h. eben auf die Kapitel, die denselben Titel haben wie auch die zwei verlorenen Abhandlungen des Hipparch, auf die er selbst und Pappos hinweisen.[150]

An den betreffenden Stellen in der *Syntaxis* findet sich nun eben die Relation[151] zwischen den Gröfsen α, φ und δ, und sie wird *direkt* auf-

148) Diese Stelle lautet: „*Ὅτι δὲ τῶν ἀναφορικῶν χρόνων τὸν προκείμενον τρόπον ἡμῖν ἐκτεθειμένων εὔληπτα τὰ λοιπὰ πάντα γενήσεται τῶν εἰς τοῦτο τὸ μέρος συντεινόντων, καὶ οὔτε γραμμικῶν δείξεων πρὸς ἕκαστα αὐτῶν δεησόμεθα οὔτε κανονογραφίας περισσῆς, δι' αὐτῶν τῶν ὑποταχθησομένων ἐφόδων φανερὸν ἔσται.*“ Die Worte, mit denen II, cap. 9 anfängt, beziehen sich auf II, cap. 7—8.

149) Diese Stelle lautet: „*Τούτων δ'οὕτως ἐχόντων, οἱ μὲν τῶν ἀληθινῶν καὶ πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου θεωρουμένων συναναπολῶν τε καὶ συμμεσουρανήσεων καὶ συγκαταδύσεων χρόνοι αὐτόθεν διὰ μόνων τῶν γραμμῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν ἀστερισμὸν αὐτῶν θέσεως ἡμῖν δύνανται λαμβάνεσθαι, διὰ τὸ καὶ τὰ σημεῖα τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων, οἷς ἕκαστος τῶν ἀπλανῶν συμμεσουρανεῖ τε καὶ συναναπέλλει καὶ συγκαταδύνει, δείκνυσθαι γραμμικῶς διὰ τῶν ὑποκειμένων θεωρημάτων.*“

150) Vgl. oben Seite 70 und die Noten 115—118.

151) Diese Relation heifst in der *Syntaxis* II, cap. 3 und 7:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(90^0-\varphi)} = \frac{\sin(90^0-\delta)}{\sin\delta} \cdot \frac{\sin(\alpha-90^0)}{\sin 90^0},$$

d. h. $\sin(\alpha - 90^0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$ (vgl. Note 147, vorhergehende Seite), wo α und δ

gestellt durch Menelaos' Satz, während die gleiche Relation sich im *Analemma* nur *implicite* findet.

Wir dürfen deswegen annehmen, dafs Hipparchs Worte *διὰ τῶν γραμμῶν* denselben Sinn haben wie in der *Syntaxis*. Somit bedeuten sie ganz einfach, dafs Hipparch in seiner Abhandlung *περὶ συνανατολῶν* durch Figuren auf der Oberfläche der Kugel (*σφαιρικαὶ δείξεις*) näher erörtert, was er im *Kommentar* lediglich an Beispielen ohne geometrische Nachweise zeigt. Eine indirekte Bestätigung dieser Annahme finden wir darin, dafs Menelaos' Satz schon *vor* Menelaos bekannt war, und dafs alle die Probleme, für die in Hipparchs *Kommentar* die Beweise fehlen, in der That in den zwei erwähnten Kapiteln der *Syntaxis* (II, 7 und VIII, 5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und der Sehnentafel gelöst werden.

Wir glauben somit, dafs Hipparch in seiner Abhandlung *περὶ τῆς τῶν ιβ' ζῳδίων ἀναφορᾶς* ganz wie Ptolemaios in der *Syntaxis* II, cap. 7—8 sich ein *Κανόνιον τῶν ἀναφορῶν* (d. h. eine Rektascensions- und Obliquascensionstafel) berechnet hat. Ferner hat er dann in seinem Werke *περὶ τῶν συνανατολῶν* durch Anwendung von Menelaos' Satz, d. h. *διὰ τῶν γραμμῶν* und mit Hülfe der Sehnentafel und der Obliquascensionstafel die Beweise und die Berechnungen, deren Resultate er im *Kommentar* angiebt, genau erörtert. Eine kurze Übersicht der von Hipparch in dieser Erörterung benutzten *σφαιρικαὶ δείξεις* giebt Ptolemaios dann in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 im Anschlufs an seinen Fixsternkatalog.

Damit wollen wir keineswegs behaupten, dafs die Analemmakonstruktionen neueren Datums sind als die *σφαιρικαὶ δείξεις*; nur stehen erstere nicht in direkter Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie, sondern bestanden vielleicht lange vorher als eine mehr primitive, rein graphische Methode. Später, da die Sehnentafeln vorhanden waren, führte man bei den Sonnenuhrkonstruktionen die durch die Tafeln bestimmbaren Gröfsen auf diese zurück, indem man sie als „gegebene" bezeichnete. Dafür spricht sowohl die ganze Abfassung und Form des *Analemmas* als auch der Umstand, dafs die *σφαιρικαὶ δείξεις* im Gegensatz zu den Analemmakonstruk-

sich auf einen Punkt der Ekliptik beziehen. — Diese Berechnung haben wir schon oben Seite 73 genau zitiert und dem Hipparch beigelegt. — In der *Syntaxis* VIII, cap. 5 wird genau dieselbe Relation gefunden, nur beziehen sich α und δ diesmal auf einen Fixstern, und die Relation dient dazu, „die Punkte des Äquators und der Ekliptik, die gleichzeitig mit den Fixsternen auf- und untergehen, mit Hülfe der gleichzeitig kulminierenden Punkte zu finden", vgl. *Syntaxis*, ed. Halma, II, p. 106, 14—18. Es ist aber dies eine Aufgabe, die Hipparch lösen mufste, um die Zahlenwerte in seinem Kommentar ausfindig zu machen, wenn er überhaupt trigonometrische und nicht rein instrumentale Methoden benutzte.

tionen direkt auf Berechnung abzielen und auch von Ptolemaios der Sehnentafel direkt beigefügt werden.

Die Berechnungen, die Zeuthen im *Analemma* gefunden und nachgewiesen hat, kommen folgenden modernen Formeln gleich:

A. für das rechtwinklige sphärische Dreieck den obigen aus der *Syntaxis* herausgezogenen I, II und IV (vgl. oben Seite 82).

B. für das schiefwinklige Dreieck den zwei Formeln:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin A}{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A},$$

die sich beide auf das Dreieck „Südpol — Nadir — Sonne (auf der südlichen Halbkugel über den Horizont gelegt)" beziehen, d. h. auf ein Dreieck mit den Seiten $90^0 - \delta$, $90^0 + h$ und $90^0 - \varphi$, wo die den zwei erstgenannten Seiten gegenüber liegenden Winkel ω und $180^0 - t$ berechnet werden (δ = die Deklination der Sonne, h = die Sonnenhöhe, φ = die Polhöhe, ω = das Azimuth der Sonne, t = der Stundenwinkel derselben).

Bemerkenswert ist, dafs Ptolemaios in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104—5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und einer geschickten Anwendung der Deklinationstafel eine ganz ähnliche Auflösung eines schiefwinkligen Dreiecks erreicht hat. Er findet nämlich hier die Deklination und Rektascension eines durch Breite und Länge gegebenen Sterns, d. h. er löst das Dreieck Stern — Weltpol — Pol der Ekliptik. Es mufs aber immer scharf betont werden, dafs bei diesen Auflösungen schiefwinkliger Dreiecke weder im *Analemma* noch in der *Syntaxis* von einer Kenntnis der betreffenden allgemeinen Formeln die Rede sein kann.

Die Berechnungen von ebenen Dreiecken, die wir in Ptolemaios' *Syntaxis* finden, hat uns v. Braunmühl (l. c. p. 26—27) dargelegt. Wir gehen nicht näher auf diese ein, weil wir sie im folgenden nicht gebrauchen.

Eine andere damit in Verbindung stehende Frage werden wir dagegen kurz erörtern, und zwar die, ob die Griechen, wie Tannery[151a]) vermutet, jemals die Sinusfunktion statt der doppelten Sehne eingeführt haben.

Wenn wir Tannerys Hypothese nicht beistimmen können, so geschieht es nicht etwa, weil wir keine Spuren von einer Sinusfunktion, weder bei Ptolemaios noch bei Menelaos, gefunden haben, sondern vielmehr weil wir keinen Grund sehen, diese Hypothese aufzustellen; denn:

151a) Tannery, *l'astr. anc.* p. 63—67.

1. solange die Cosinus- und Tangensfunktionen doch nicht eingeführt waren, ist der Vorteil des Sinuses statt der Sehne praktisch sehr gering;

2. finden wir die Annahme, dafs die Sehnentafeln die Sinustafeln hätten verdrängen sollen, in jeder Beziehung sehr unwahrscheinlich, um so mehr, weil wir (vgl. oben Seite 79—80 und unten Seite 117—118)

3. guten Grund haben anzunehmen, dafs die Einführung der Sehne als trigonometrische Funktion in inniger Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie steht.

Es scheint uns deswegen viel natürlicher, anzunehmen, dafs ein anderes Volk als die Griechen, und zwar ein Volk, das mehr Sinn für praktische Rechnung hatte als diese und durch keine Tradition gebunden war, diese Neuerung gemacht hat. Dies trifft nun gerade in Bezug auf die Inder zu. Deswegen können jedoch die indischen Sinustafeln von griechischen Sehnentafeln ihren Ursprung haben, obwohl wir bezweifeln, dafs dies der Fall ist.

Noch eines ist hier zu bemerken: Die Weise, auf welche Ptolemaios die Sehnentafeln zur Auflösung ebener Dreiecke verwendet, zeigt einerseits, wie leicht die Nachteile, die die Sehnentafeln den Sinustafeln gegenüber aufweisen, sich umgehen lassen und in der That umgangen worden sind, macht es aber andererseits fast undenkbar, dafs die Sinusfunktion dem Ptolemaios bekannt gewesen sei.

Greifen wir aus den zahlreichen Beispielen die Auflösung von Dreieck BED mit dem rechten Winkel B und $\angle E = 51^0\,30'$ (Ptolemaios, *Syntaxis* XIII, cap. 7, ed. Halma II, p. 419—420) heraus: $\angle BED$ mifst dann, sagt Ptolemaios, 103 von solchen Graden, von denen 360 Grad 2 Rechte betragen (*τοιούτων* $\overline{\rho\gamma}'$, *οἷων αἱ δύο ὀρθαὶ* $\overline{\tau\xi}$), folglich, fährt Ptolemaios fort, ist das Verhältnis der Katheten 94 : 75 von solchen Teilen, deren **120** auf die Hypotenuse gehen, d. h. Ptolemaios erreicht, wenn er immer die Winkel und gleichzeitig auch die Hypotenuse doppelt rechnet, die Sehnentafel ganz wie eine Sinustafel verwenden zu können; denn in der Sehnentafel entsprechen 103^0 und 77^0 bezw. 94 partes und 75 partes.

Ursprünglich ist Ptolemaios zu diesem Verfahren gekommen durch Umschreibung des Dreiecks mit einem Kreis, in welchem die Hypotenuse dann Durchmesser wird. Das zeigt uns nämlich die erste Auflösung ebener Dreiecke in der *Syntaxis* (II, cap. 5, ed. Heiberg, I, p. 99—100); v. Braunmühls Darstellung (I, p. 26) ist somit ganz zutreffend. Später aber wird in der *Syntaxis* die Umschreibung nicht mehr erwähnt; alle Gröfsen werden gleich verdoppelt, das Nachschlagen in der Sehnentafel direkt erledigt, ja sogar ganze Rechnungen mit den doppelten Werten durchgeführt. Die Griechen, denen dieses Verfahren nun einmal geläufig war, fanden keinen Grund, Neuerungen einzuführen; die Inder dagegen, die an die Tradition nicht

gebunden waren, und denen diese Methode schwerfällig erscheinen mufste, hatten guten Grund, die scheinbar lediglich formelle Verbesserung zu machen. Dafs diese Verbesserung in ihren Konsequenzen sich als eine sehr wichtige erwies, indem sie die Einführung der Cosinus- und der Tangensfunktion mit sich führte, hätte man ja im voraus nicht wissen können.

b. Der Inhalt von Menelaos' drittem Buch.

III, 1. (sog. Menelaos' Satz):

Es liegen von diesem Satze mehrere Versionen vor, die, obwohl der Grundgedanke der Beweisführung immer derselbe bleibt, doch sehr verschieden sind. Sie teilen sich in zwei Hauptgruppen, nämlich:

1. Die Redaktion in der Maurolycusausgabe (Quelle unbekannt), die arabische Rezension von Abu-Nasr-Mansur (Cod. Leid. 930), Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13 (ed. Heiberg I, p. 74 ff., ed. Halma I, p. 54 ff.) und Theons *Kommentar* zu Ptolemaios (Baselerausgabe p. 66 ff.). Zwar weichen diese Redaktionen in Umfang und Text von einander ab; die Hauptfigur (wie deren Buchstaben) ist aber genau dieselbe.

2. Die Redaktion in Gerhards Übersetzung und in der Halleyausgabe (d. h. in Jacob ben Machirs hebräischer Übersetzung). Die Hauptfigur hat hier ganz andere Buchstaben als in den Redaktionen der ersten Gruppe.

Ich ziehe unbedingt die Redaktion im Cod. Leid. 930 (Abu-Nasr-Mansur) vor, die ich aus folgenden Gründen für die ursprüngliche Redaktion des Menelaos betrachte:

1. In dieser Redaktion kommt ein Spezialfall vor, den ich weder im Ptolemaios noch im Theon finde, der aber in den Gerhardschen und Jacob ben Machirschen Übersetzungen wieder vorkommt, obwohl mit anderen Figurenbuchstaben und einem ziemlich abweichenden Text.

2. Die Figurenbuchstaben fangen in dieser Redaktion nach griechischer Gewohnheit mit A, B, Γ u. s. w. an und stimmen mit denen im Ptolemaios überein.

3. Die Beweisführung im Ptolemaios kann als eine verkürzte Wiedergabe dieser Redaktion aufgefafst werden, was dagegen nicht für die Redaktion in der Maurolycusausgabe oder für die der zweiten Gruppe zutrifft.

4. Wenn wir die Überlieferung von Nasr-Mansur als echt annehmen, so können wir gewisse Erweiterungen des Satzes im Theon dem Menelaos zuschreiben, während umgekehrt Nasr-Mansurs Redaktion sich nicht als eine Kompilation aus Theon erklären läfst, weil der oben erwähnte Spezialfall, der den Menelaosredaktionen eigen ist, im Theon fehlt.

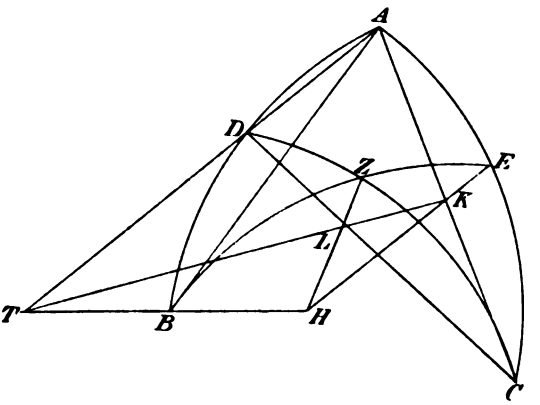
Nach Abu-Nasr-Mansur ist die Beweisführung diese[152]):

Menelaos III, 1 (Figur 48):

Zwischen zwei gröfsten Kreisbogen ADB und AEC schneiden sich zwei andere DZC und BZE in Z. Alle vier Bogen sind kleiner als ein Halbkreis. Zu beweisen ist

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA}.$$ [152a])

Beweis: Sei H das Kugelzentrum. Man ziehe die Halbmesser HZ, HB, HE und die Gerade AD. — AD und BH, die in derselben Ebene liegen, sind entweder parallel oder nicht.



Figur 48.

Wenn sie nicht parallel sind, so schneiden sie sich entweder in der Richtung D oder in der Richtung A.

I. *AD und BH schneiden sich in der Richtung D*, und zwar in T.

Man ziehe die Geraden AKC und DLC. Nun liegen die Punkte K, L und T auf einer Geraden, nämlich der Schnittlinie der Ebenen, die durch den Bogen EZB und das Dreieck ACD bestimmt sind.

Zwischen den zwei Geraden AC und AT schneiden sich also zwei andere CD und TK in L. Folglich wird [Menelaos' Satz in der Ebene]

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CL}{LD} \cdot \frac{DT}{TA},$$

aber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{CK}{KA} &= \frac{\sin CE}{\sin EA} \\ \frac{CL}{LD} &= \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \end{aligned}\right\} \text{(Ptol. } \textit{Synt.} \text{ ed. Heiberg I, p. 70),}$$

152) Mitteilung von R. Besthorn.

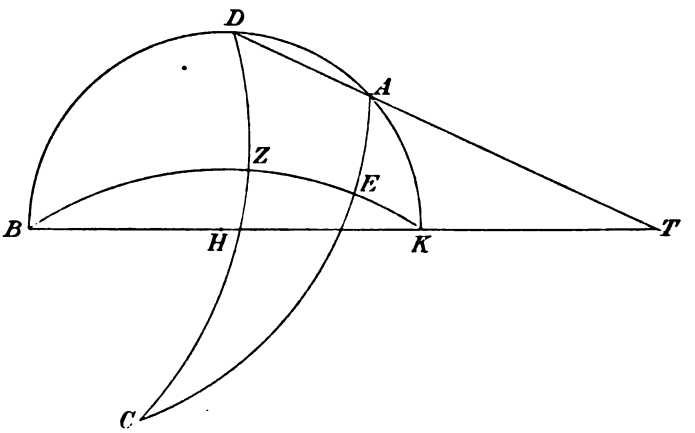
152a) In dem ursprünglichen Menelaostext stand sicher wie in Gerhards Übersetzung: $\frac{\text{crd.}\,2CE}{\text{crd.}\,2EA} = \frac{\text{crd.}\,2CZ}{\text{crd.}\,2ZD} \cdot \frac{\text{crd.}\,2DB}{\text{crd.}\,2BA}$. Wie die Araber und Halley werden wir die „corda dupli arcus" mit „sin" ersetzen. Es kommt nämlich auf dasselbe heraus, da Menelaos fast immer mit Verhältnissen operiert. Wenn im folgenden in der Wiedergabe von Menelaos' 3. Buch die Sinusfunktion benutzt ist, mufs der Leser sich also immer erinnern, dafs Menelaos sicher wie Ptolemaios *ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν* gesagt hat.

$$\frac{DT}{TA} = \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{(Ptol. } \textit{Synt.} \text{ ed. Heiberg I, p. 72)},$$

also:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Beweis finden wir in Ptolemaios *Syntaxis*[153]) wieder; da stehen auch die nötigen Hülfssätze aus der Geometrie der Ebene. Diese Hülfssätze sind



Figur 49.

im Menelaos als bekannt vorausgesetzt. Sie standen also in einem anderen Werk von Menelaos selbst oder von einem seiner Vorgänger.

II. (Figur 49.) *AD und BK schneiden sich in der Richtung A*, und zwar in *T*.

Wir verlängern die Bogen *BDA* und *BZE* bis zum Schnitt auf dem Durchmesser *BH* in *K*.

Dann wird (mit Anwendung des ersten Teils des Beweises auf die Figur *DAKECZ*):

$$\frac{\sin CZ}{\sin ZD} = \frac{\sin CE}{\sin EA} \cdot \frac{\sin AK}{\sin KD},$$

und durch Umtausch der Glieder:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin KD}{\sin AK}.$$

Nun ist $\sin KD = \sin DB$ und $\sin KA = \sin BA$[154]), also wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Teil des Beweises fehlt sowohl im Ptolemaios als bei Gerhard.

153) *Syntaxis* I, cap. 13, ed. Heiberg I, p. 74—76.

154) d. h. $\sin(\pi - a) = \sin a$; vgl. die Formel 1 Seite 82 und Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Heiberg I, p. 36; vgl. Theons *Kommentar*, Baselerausgabe p. 69 unten.

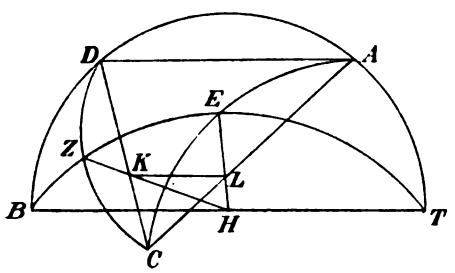
III. (Figur 50.) *Wenn* $AD \doteq BK$, so verlängert man die Bogen BDA und BZE bis zum Schnitt auf BH in T, zieht die Geraden AC und HE, die sich in L, DC und ZH, die sich in K schneiden. Der Schnitt der Ebenen BLT und ADC wird dann $\doteq AD$; also haben wir

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD}^{155}) \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD};^{156})$$

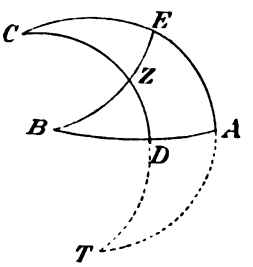
weil aber $\sin DB = \sin BA$[157]), so wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Spezialfall, der in allen mir bekannten Menelaosredaktionen vorkommt, treffen wir sonst nicht in der griechischen Litteratur.



Figur 50.



Figur 51.

IV. (Figur 51.) *In derselben Figur* $ADBZCE$ *gilt auch die Proportion*

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE}.$$

Wir verlängern die Bogen CA und CD bis zum Schnitt in T; dann wird (wegen des eben Bewiesenen)

$$\frac{\sin TA}{\sin AE} = \frac{\sin TD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE};$$

nun ist $\sin TA = \sin CA$ und $\sin TD = \sin CD$[158]), also auch:

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Satz finden wir im Ptolemaios[159]) ohne Beweis referiert, im Theon[160]) mit einem von III, 1^{I-III} unabhängigen Beweis. —

---

155) Euklid, *Elementa* VI, 2.

156) Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 70.

157) Vgl. Formel 1, Seite 82 oben.

158) Vgl. Formel 1, Seite 82 oben.

159) Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 76.

160) Baselerausgabe, p. 67—68. In Tâbit ibn Korrah, *De figura sectoris* spielt dieser Beweis von Theon eine grofse Rolle.

Nach moderner Auffassung umfaſst Menelaos' Satz vier Fälle, indem die Figur auf vierfache Art als ein durch eine Transversale geschnittenes Dreieck betrachtet werden kann.

Anscheinend hat Menelaos nur zwei Fälle behandelt, und zwar 1) den Fall des durch EZB geschnittenen groſsen Dreiecks ADC, und 2) den des durch ADB geschnittenen kleinen ECZ; indem er aber sowohl den Fall, daſs die Gerade AD den Durchmesser durch B einmal in der Richtung D, dann in der Richtung A schneidet, als auch den, daſs diese Geraden parallel sind, behandelt hat, so hat er den Satz so verallgemeinert, daſs er ohne weiteres das groſse Dreieck ADC mit dem anderen groſsen AEB und das kleine ECZ mit dem kleinen DBZ vertauschen kann.

Es zeigt sich also, daſs im Menelaos *der Satz* ***allgemein*** *bewiesen ist, und zwar in der knappsten Form, daſs dann Ptolemaios aus diesem Beweis das für seinen Zweck Notwendige ausgewählt hat, während Theon*[161]) (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 16) *den Beweis mit überflüssigen Fällen, die sich auf die schon bewiesenen zurückführen lassen, beschwert hat*, ein Verfahren, das seinen Höhepunkt in den 18 modi bei Tâbit ibn Korrah[162]) erreicht.

Wie so oft, zeigt es sich auch hier, daſs die älteste Textform die exakteste ist.

Ob der Satz des Menelaos dem Menelaos angehört, wollen wir später erörtern, doch bemerken wir gleich, daſs er nicht als Dreieckssatz formuliert ist, und daſs die allgemeine Formulierung (ἡ πρότασις) fehlt. Es könnte das ein Zeichen davon sein, daſs der Satz ursprünglich in einem astronomischen Werke bewiesen und in Menelaos' *Sphärik* übergegangen ist.

Menelaos III, 2 (Figur 52):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ

$$\angle A = D \quad \textit{und} \quad \begin{cases} \angle C = Z \\ \textit{oder} \\ \angle C + Z = 180^0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin BC} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}. \tag{1}$$

Beweis: Sei $\smile AH = DZ$ und $\angle AHT = EZD$, so wird

$\triangle EZD \cong \triangle THA$ (I, 14) d. h. $\smile TA = DE$, $\smile HT = EZ$.

161) Baselerausgabe, p. 68—70.

162) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 46; v. Braunmühls Vermutung, daſs das „lemma in 18 modis" von Tâbits Schrift herstammt, wird durch die Untersuchung von Cod. Arsenal. 1035 bestätigt; vgl. oben Note 54.

Je nachdem $\angle AHT = C$ oder $\angle AHT + C = 180^0$, wird $\smile CK + KH = 180^0$ oder $\smile CK = KH$ (I, 10), d. h. in beiden Fällen $\sin CK = \sin KH$, und da

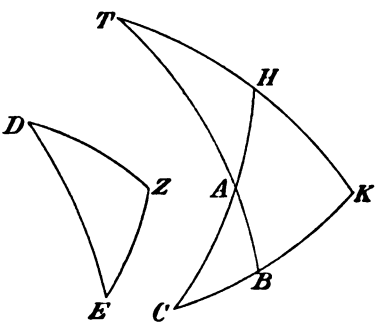
$$\frac{\sin KC}{\sin CB} = \frac{\sin KH}{\sin HT} \cdot \frac{\sin TA}{\sin AB} \quad \text{(III, 1)},$$

so wird

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin TA}{\sin HT}, \text{ d. h. } = \frac{\sin DE}{\sin EZ} \quad \text{q. e. d.}$$

II. Umgekehrt, wenn $\angle A = D$ und $\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}$, folgt, dafs $\angle C = Z$ oder $\angle C + Z = 180^0$.[163])

Für $\angle A = D$ und $\angle C = Z = 90^0$ [der Spezialfall, den Menelaos selbst meistens verwendet] hat man, wie v. Braunmühl gezeigt hat, den später unter dem Namen *„Regula quattuor quantitatum"* bekannten Satz, worüber siehe v. Braunmühl, *Gesch. der Trig.* I, p. 17, 47, 58—60, 81, 127—129 u. s. w.



Figur 52.

Für $DE = 90^0 (= DZ)$ und $\angle C = Z = 90^0$ geht (1) in die Grundformel I für rechtwinklige Dreiecke über.

Es ist für Ptolemaios' Behandlung der sphärisch-trigonometrischen Probleme charakteristisch, dafs er mehrmals den Satz des Menelaos anwendet, auch da, wo Menelaos III, 2 direkt anwendbar ist, so dafs er ganz eigentlich die regula quattuor quantitatum (III, 2) aufs Neue beweist, statt auf sie als schon bekannt hinzuweisen. Es ist dies um so auffallender, weil die Rechnung durch Anwendung von III, 2 mit viermaligem Nachschlagen in der Sehnentafel erledigt wird, während die Anwendung von Menelaos' Satz immer sechsmaliges fordert. Als Beispiel dient folgendes:

Zur Berechnung der Deklinationstafel würde Menelaos III, 2 die Formel:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \delta} = \frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon}$$

(λ die Länge, δ die Deklination des Ekliptikpunktes und ε die Neigung der Ekliptik) gegeben haben, die für die Berechnung leichter ist als

$$\frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90^0}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin 90^0},$$

die wir bei Ptolemaios (*Syntaxis* I, cap. 14) finden.

---

163) Das Corollar zu III, 2 in der Halleyausgabe ist vom Herausgeber hinzugefügt.

Ähnliche Beispiele finden sich in der *Syntaxis* II, cap. 3 und cap. 11.

Es liegt nahe, anzunehmen, dafs Ptolemaios in diesen Fällen eine ältere Methode nachgeahmt hat, ohne auf die von Menelaos eingeführte Erleichterung Rücksicht zu nehmen.

Menelaos III, 3 (Figur 53):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \qquad \angle C = Z \gtrless 90^0,$$

und H und T die Pole der Bogen AC und DZ sind, dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{\sin ED}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin BH}{\sin ET}.$$

Wir legen nämlich die Dreiecke auf einander mit $\angle Z$ auf $\angle C$, und der Satz ist eine direkte Folge von III, 1.[164])

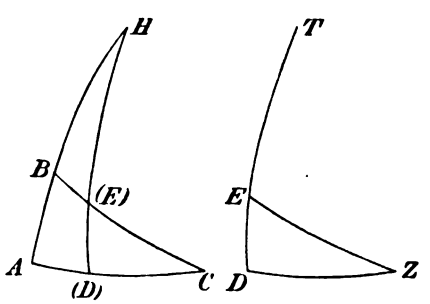
Indem $\sin BH = \cos AB$ und $\sin ET = \cos ED$, sagt der Satz, modern umgeschrieben:

$$\frac{\operatorname{tg} AB}{\operatorname{tg} ED} = \frac{\sin CA}{\sin CD}. \qquad (1)$$

Es ist dies die *„Tangenten- oder Schattenregel"* der Araber (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 17—18, 58, 67—69 u. s. w.).

Für $\smile CA = BC = 90^0$ geht (1) in die Grundformel II für rechtwinklige Dreiecke über.

Auch die Anwendung dieses Satzes vermeidet Ptolemaios und beweist ihn jedesmal aufs Neue durch Menelaos' Satz. Beispiele finden sich in der *Syntaxis* I, cap. 16; II, cap. 3 und VIII, cap. 5. In der Berechnung macht es jedoch, solange die Tangensfunktion nicht aufgestellt und eine Tangententafel nicht berechnet ist, keinen Unterschied, ob III, 1 oder III, 3 verwendet wird.



Figur 53.

Menelaos III, 4 (Figur 54):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ, wo $\angle A = D$ und $\angle C = Z$, die Höhen $\smile BH$ und $\smile ET$ gezogen sind, so ist das Sinusverhältnis der Basensegmente gleich, d. h.

$$\frac{\sin AH}{\sin DT} = \frac{\sin CH}{\sin ZT}.$$

164) Das Corollar zu III, 3 in der Halleyausgabe rührt von Halley selbst her.

Es ist dies eine direkte Folge von III, 3, da beide Verhältnisse gleich $\frac{\operatorname{tg} BH}{\operatorname{tg} ET}$ sind.

Menelaos III, 5 (Figur 55):

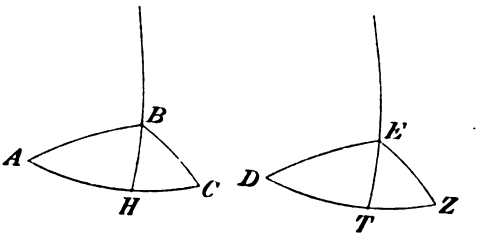
Obwohl der Text dieses Satzes sowohl in der Rezension des Nasr-Mansur als in der Gerhardschen Übersetzung stellenweise verdorben ist, läßt sich der Beweis durch Vergleich dieser zwei Redaktionen mit Sicherheit wiederherstellen, und zwar so:

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABG und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \quad \angle G = Z, \quad \smile AG < 90^0, \quad \smile DZ < 90^0,$$

dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG - GA)} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ - ZD)}.$$



Figur 54.

Beweis: Sei nämlich

$$\smile LG = GK = AG$$

und analog

$$\smile FZ = ZQ = DZ.$$

Mit G und Z als Pole ziehen wir die größten Kreise bezw. $NSMH$ und $ROCT$. Denken wir uns die Bogen AS und AM verlängert bis zum Schnitt in A', so wird $\smile KG + GA' = 180^0$, und da $\smile GM = 90^0$, so wird $\angle KGM = \angle MGS$ (I, 26) und analog wird $\angle QZC = \angle CZO$, und weil $\angle G = Z$, so sind alle diese vier Winkel gleich.

Analog erhält man:

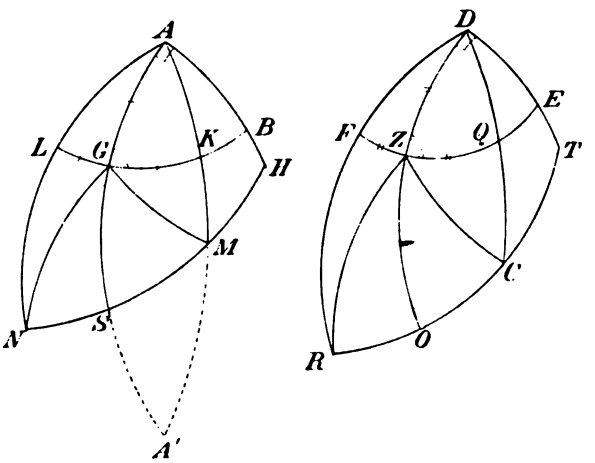
$$\angle LGN = NGS = FZR = RZO$$

und somit durch Kongruenz

$$\smile NS = RO,$$
$$\smile SM = OC,$$
$$\smile MH = CT,$$

also auch

$$\smile NH = RT.$$



Figur 55.

Da nun die zwei Bogen BL und HN durch die vier Bogen AH, AM, AS und AN geschnitten werden, so gilt:

tionen direkt auf Berechnung abzielen und auch von Ptolemaios der Sehnentafel direkt beigefügt werden.

Die Berechnungen, die Zeuthen im *Analemma* gefunden und nachgewiesen hat, kommen folgenden modernen Formeln gleich:

A. für das rechtwinklige sphärische Dreieck den obigen aus der *Syntaxis* herausgezogenen I, II und IV (vgl. oben Seite 82).

B. für das schiefwinklige Dreieck den zwei Formeln:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin A}{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A},$$

die sich beide auf das Dreieck „Südpol — Nadir — Sonne (auf der südlichen Halbkugel über den Horizont gelegt)" beziehen, d. h. auf ein Dreieck mit den Seiten $90^0 - \delta$, $90^0 + h$ und $90^0 - \varphi$, wo die den zwei erstgenannten Seiten gegenüber liegenden Winkel ω und $180^0 - t$ berechnet werden (δ = die Deklination der Sonne, h = die Sonnenhöhe, φ = die Polhöhe, ω = das Azimuth der Sonne, t = der Stundenwinkel derselben).

Bemerkenswert ist, dafs Ptolemaios in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104—5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und einer geschickten Anwendung der Deklinationstafel eine ganz ähnliche Auflösung eines schiefwinkligen Dreiecks erreicht hat. Er findet nämlich hier die Deklination und Rektascension eines durch Breite und Länge gegebenen Sterns, d. h. er löst das Dreieck Stern — Weltpol — Pol der Ekliptik. Es mufs aber immer scharf betont werden, dafs bei diesen Auflösungen schiefwinkliger Dreiecke weder im *Analemma* noch in der *Syntaxis* von einer Kenntnis der betreffenden allgemeinen Formeln die Rede sein kann.

Die Berechnungen von ebenen Dreiecken, die wir in Ptolemaios' *Syntaxis* finden, hat uns v. Braunmühl (l. c. p. 26—27) dargelegt. Wir gehen nicht näher auf diese ein, weil wir sie im folgenden nicht gebrauchen.

Eine andere damit in Verbindung stehende Frage werden wir dagegen kurz erörtern, und zwar die, ob die Griechen, wie Tannery[151a]) vermutet, jemals die Sinusfunktion statt der doppelten Sehne eingeführt haben.

Wenn wir Tannerys Hypothese nicht beistimmen können, so geschieht es nicht etwa, weil wir keine Spuren von einer Sinusfunktion, weder bei Ptolemaios noch bei Menelaos, gefunden haben, sondern vielmehr weil wir keinen Grund sehen, diese Hypothese aufzustellen; denn:

151a) Tannery, *l'astr. anc.* p. 63—67.

1. solange die Cosinus- und Tangensfunktionen doch nicht eingeführt waren, ist der Vorteil des Sinuses statt der Sehne praktisch sehr gering;

2. finden wir die Annahme, dafs die Sehnentafeln die Sinustafeln hätten verdrängen sollen, in jeder Beziehung sehr unwahrscheinlich, um so mehr, weil wir (vgl. oben Seite 79—80 und unten Seite 117—118)

3. guten Grund haben anzunehmen, dafs die Einführung der Sehne als trigonometrische Funktion in inniger Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie steht.

Es scheint uns deswegen viel natürlicher, anzunehmen, dafs ein anderes Volk als die Griechen, und zwar ein Volk, das mehr Sinn für praktische Rechnung hatte als diese und durch keine Tradition gebunden war, diese Neuerung gemacht hat. Dies trifft nun gerade in Bezug auf die Inder zu. Deswegen können jedoch die indischen Sinustafeln von griechischen Sehnentafeln ihren Ursprung haben, obwohl wir bezweifeln, dafs dies der Fall ist.

Noch eines ist hier zu bemerken: Die Weise, auf welche Ptolemaios die Sehnentafeln zur Auflösung ebener Dreiecke verwendet, zeigt einerseits, wie leicht die Nachteile, die die Sehnentafeln den Sinustafeln gegenüber aufweisen, sich umgehen lassen und in der That umgangen worden sind, macht es aber andererseits fast undenkbar, dafs die Sinusfunktion dem Ptolemaios bekannt gewesen sei.

Greifen wir aus den zahlreichen Beispielen die Auflösung von Dreieck BED mit dem rechten Winkel B und $\angle E = 51^0 30'$ (Ptolemaios, *Syntaxis* XIII, cap. 7, ed. Halma II, p. 419—420) heraus: $\angle BED$ mifst dann, sagt Ptolemaios, 103 von solchen Graden, von denen 360 Grad 2 Rechte betragen (τοιούτων $\overline{\varrho\gamma'}$, οἵων αἱ δύο ὀρθαὶ $\overline{\tau\xi}$), folglich, fährt Ptolemaios fort, ist das Verhältnis der Katheten 94 : 75 von solchen Teilen, deren 120 auf die Hypotenuse gehen, d. h. Ptolemaios erreicht, wenn er immer die Winkel und gleichzeitig auch die Hypotenuse doppelt rechnet, die Sehnentafel ganz wie eine Sinustafel verwenden zu können; denn in der Sehnentafel entsprechen 103^0 und 77^0 bezw. 94 partes und 75 partes.

Ursprünglich ist Ptolemaios zu diesem Verfahren gekommen durch Umschreibung des Dreiecks mit einem Kreis, in welchem die Hypotenuse dann Durchmesser wird. Das zeigt uns nämlich die erste Auflösung ebener Dreiecke in der *Syntaxis* (II, cap. 5, ed. Heiberg, I, p. 99—100); v. Braunmühls Darstellung (I, p. 26) ist somit ganz zutreffend. Später aber wird in der *Syntaxis* die Umschreibung nicht mehr erwähnt; alle Gröfsen werden gleich verdoppelt, das Nachschlagen in der Sehnentafel direkt erledigt, ja sogar ganze Rechnungen mit den doppelten Werten durchgeführt. Die Griechen, denen dieses Verfahren nun einmal geläufig war, fanden keinen Grund, Neuerungen einzuführen; die Inder dagegen, die an die Tradition nicht

gebunden waren, und denen diese Methode schwerfällig erscheinen mufste, hatten guten Grund, die scheinbar lediglich formelle Verbesserung zu machen. Dafs diese Verbesserung in ihren Konsequenzen sich als eine sehr wichtige erwies, indem sie die Einführung der Cosinus- und der Tangensfunktion mit sich führte, hätte man ja im voraus nicht wissen können.

b. Der Inhalt von Menelaos' drittem Buch.

III, 1. (sog. Menelaos' Satz):

Es liegen von diesem Satze mehrere Versionen vor, die, obwohl der Grundgedanke der Beweisführung immer derselbe bleibt, doch sehr verschieden sind. Sie teilen sich in zwei Hauptgruppen, nämlich:

1. Die Redaktion in der Maurolycusausgabe (Quelle unbekannt), die arabische Rezension von Abu-Nasr-Mansur (Cod. Leid. 930), Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13 (ed. Heiberg I, p. 74 ff., ed. Halma I, p. 54 ff.) und Theons *Kommentar* zu Ptolemaios (Baselerausgabe p. 66 ff.). Zwar weichen diese Redaktionen in Umfang und Text von einander ab; die Hauptfigur (wie deren Buchstaben) ist aber genau dieselbe.

2. Die Redaktion in Gerhards Übersetzung und in der Halleyausgabe (d. h. in Jacob ben Machirs hebräischer Übersetzung). Die Hauptfigur hat hier ganz andere Buchstaben als in den Redaktionen der ersten Gruppe.

Ich ziehe unbedingt die Redaktion im Cod. Leid. 930 (Abu-Nasr-Mansur) vor, die ich aus folgenden Gründen für die ursprüngliche Redaktion des Menelaos betrachte:

1. In dieser Redaktion kommt ein Spezialfall vor, den ich weder im Ptolemaios noch im Theon finde, der aber in den Gerhardschen und Jacob ben Machirschen Übersetzungen wieder vorkommt, obwohl mit anderen Figurenbuchstaben und einem ziemlich abweichenden Text.

2. Die Figurenbuchstaben fangen in dieser Redaktion nach griechischer Gewohnheit mit A, B, Γ u. s. w. an und stimmen mit denen im Ptolemaios überein.

3. Die Beweisführung im Ptolemaios kann als eine verkürzte Wiedergabe dieser Redaktion aufgefafst werden, was dagegen nicht für die Redaktion in der Maurolycusausgabe oder für die der zweiten Gruppe zutrifft.

4. Wenn wir die Überlieferung von Nasr-Mansur als echt annehmen, so können wir gewisse Erweiterungen des Satzes im Theon dem Menelaos zuschreiben, während umgekehrt Nasr-Mansurs Redaktion sich nicht als eine Kompilation aus Theon erklären läfst, weil der oben erwähnte Spezialfall, der den Menelaosredaktionen eigen ist, im Theon fehlt.

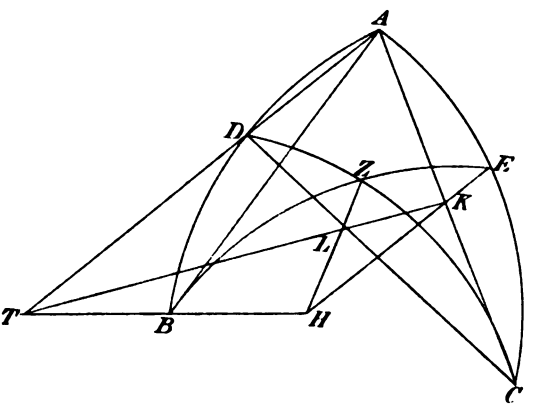
Nach Abu-Nasr-Mansur ist die Beweisführung diese[152]):

Menelaos III, 1 (Figur 48):

Zwischen zwei gröfsten Kreisbogen ADB und AEC schneiden sich zwei andere DZC und BZE in Z. Alle vier Bogen sind kleiner als ein Halbkreis. Zu beweisen ist

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA}.$$ [152a])

Beweis: Sei H das Kugelzentrum. Man ziehe die Halbmesser HZ, HB, HE und die Gerade AD. — AD und BH, die in derselben Ebene liegen, sind entweder parallel oder nicht.



Figur 48.

Wenn sie nicht parallel sind, so schneiden sie sich entweder in der Richtung D oder in der Richtung A.

I. *AD und BH schneiden sich in der Richtung D,* und zwar in T.

Man ziehe die Geraden AKC und DLC. Nun liegen die Punkte K, L und T auf einer Geraden, nämlich der Schnittlinie der Ebenen, die durch den Bogen EZB und das Dreieck ACD bestimmt sind.

Zwischen den zwei Geraden AC und AT schneiden sich also zwei andere CD und TK in L. Folglich wird [Menelaos' Satz in der Ebene]

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CL}{LD} \cdot \frac{DT}{TA},$$

aber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{CK}{KA} &= \frac{\sin CE}{\sin EA} \\ \frac{CL}{LD} &= \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \end{aligned}\right\} \text{(Ptol. } \textit{Synt.} \text{ ed. Heiberg I, p. 70),}$$

152) Mitteilung von R. Besthorn.

152a) In dem ursprünglichen Menelaostext stand sicher wie in Gerhards Übersetzung: $\frac{\text{crd.}\,2CE}{\text{crd.}\,2EA} = \frac{\text{crd.}\,2CZ}{\text{crd.}\,2ZD} \cdot \frac{\text{crd.}\,2DB}{\text{crd.}\,2BA}$. Wie die Araber und Halley werden wir die „corda dupli arcus" mit „sin" ersetzen. Es kommt nämlich auf dasselbe heraus, da Menelaos fast immer mit Verhältnissen operiert. Wenn im folgenden in der Wiedergabe von Menelaos' 3. Buch die Sinusfunktion benutzt ist, mufs der Leser sich also immer erinnern, dafs Menelaos sicher wie Ptolemaios *ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν* gesagt hat.

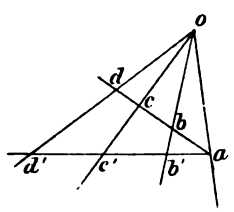
versuchen dieses leider verlorenen Werkes haben eben diese zwei Sätze eine Hauptrolle gespielt, indem man geneigt war, sie dem Euklid zuzuschreiben.[171])

Der Doppelverhältnissatz tritt bei Pappos nicht in der allgemeinen Form auf, in welcher er von Menelaos angewandt wird. Da heifst es nämlich[172]):

Wenn drei Geraden durch o (Figur 57) durch zwei andere geschnitten werden, so wird:

$$\frac{ab}{ad} \cdot \frac{cd}{cb} = \frac{ab'}{ad'} \cdot \frac{c'd'}{c'b'}$$

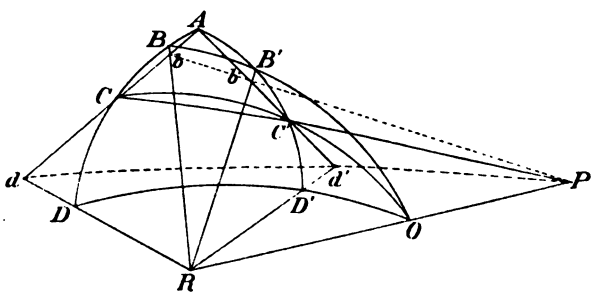
und dieser Spezialsatz kann ganz wie der allgemeine durch Menelaos' Satz bewiesen werden, was doch im Pappos nicht geschehen ist.



Figur 57.

Bemerkenswert ist es aber, dafs dieser Spezialfall auf die Kugel auf ganz ähnliche Weise wie Menelaos' Satz übertragbar ist, und zwar so:

Wir wählen (Figur 58) den Durchschnittspunkt (O) der zwei Bogen CC' und DD' aufserhalb der Bogen ACD und $AC'D'$ und führen ferner die Figur aus, ganz wie beim Beweise von Menelaos' Satz. Dazu fügen wir noch einen willkürlichen Bogen $BB'O$ durch O; so wird die Verbindungsgerade bb' durch den Durchschnittspunkt (P) der Geraden CC' und RO gehen, weil b, b' und P sowohl in der Ebene des Bogens $BB'O$, wie in der des Dreiecks ACC' liegen. In der Ebene haben wir dann die gleichen Doppelverhältnisse:



Figur 58.

$$\frac{Ab \cdot Cd}{Ad \cdot Cb} = \frac{Ab' \cdot C'd'}{Ad' \cdot C'b'},$$

wo

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{\sin AB}{\sin CB}, \quad \frac{Cd}{Ad} = \frac{\sin CD}{\sin AD}$$

171) Vgl. Chasles, *Les trois livres des Porismes d'Euclide,* Paris 1860, p. 11 und 75. — Eine treffliche Darstellung der Bedeutung der zwei hier erwähnten Sätze finden wir in Chasles, *Aperçu historique,* Paris 1875, p. 26—27, 33—35, 291—296 und 302—308.

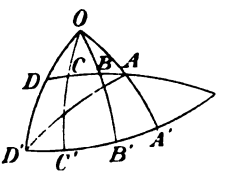
172) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 870 ff. und 1038.

(Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 70 und 73), und analog auf der rechten Seite, d. h.

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = \frac{\sin AB'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'D'}{\sin AD'} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Spezialfall läfst sich dann sehr leicht mit Hülfe eines Hülfsbogens (AD', siehe Figur 59) zu dem allgemeinen Satz, den Menelaos gebraucht, erweitern.

Diese Möglichkeit einer direkten Übertragung des Doppelverhältnissatzes beeinträchtigt nicht die Schlüsse, die wir oben gezogen haben. Denn auch dieses direkte Übertragen setzt die Kenntnis der Übertragung von Menelaos' Satz voraus.



Figur 59.

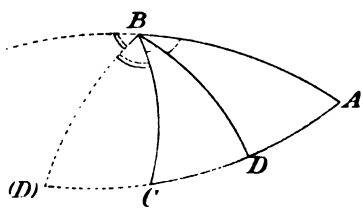
Deswegen können wir die enge geschichtliche Verbindung zwischen Menelaos' Satz und dem Doppelverhältnissatze sowohl in der Ebene wie auch auf der Kugel, die Chasles schon befürwortet, als festgestellt zu betrachten wagen. Auch meinen wir, dafs Chasles' Restitution von Euklids *Porismen* hier eine Bestätigung findet. *Die beiden Sätze in der Ebene standen offenbar in Euklids Werk, das somit die Elemente zur Erfindung der sphärischen Trigonometrie lieferte.*[173])

In der That ist Menelaos' Satz ein ausgezeichnetes Mittel zum Beweise kugelgeometrischer Sätze. Eine Reihe von wichtigen Theoremen, die nach Chasles alle in Euklids *Porismen* standen, können sowohl in der Ebene wie auf der Kugel allein mit Hülfe von Menelaos' Satz bewiesen werden, z. B. der Satz vom harmonischen Verhältnis und vom vollständigen Viereck (Pappos VII, 131 und Staudt, *Geometrie der Lage* Nr. 59). Sobald aufserdem der Doppelverhältnissatz, der lediglich als eine Folgerung aus Menelaos' Satz erscheint, bewiesen ist, so lassen sich noch andere wichtige Sätze beweisen, z. B. die Involution der Punkte, die durch den Schnitt eines vollständigen Vierecks durch eine beliebige Transversale ge-

173) Auch in der Kegelschnittlehre im Altertum spielte der Doppelverhältnissatz, wie es scheint, eine Rolle. Zeuthen vermutet nämlich (vgl. Keglesnitslæren i Oldtiden, p. 59 und 105—106), dafs Apollonios ihn zu den Tangentenbestimmungen bei der Ellipse und der Hyperbel, sowie zur Bestimmung des Kegelschnitts als Ort zu vier Geraden benutzte. Wenn wir nun die Existenz dieses Satzes (und zwar in seiner allgemeinen Form) vor Menelaos nachweisen können, so dürfte in diesem Falle Zeuthens Hypothese eine Bestätigung finden, die vielleicht diejenigen, die noch an der Richtigkeit der Zeuthenschen Hypothesen in Bezug auf die Kenntnis der Griechen zur Projektivitätslehre zweifeln, überzeugen können. Menelaos' *Sphärik* leistet uns meiner Ansicht nach den Beweis dafür, dafs die auf Pappos' Lemmata beruhende rückschliefsende Methode, die Chasles und Zeuthen benutzten, in der That zulässig ist.

bildet wird (Pappos VII, 130 und Desargues, ed. Poudra I, p. 119). Chasles' Restitution der *Porismen* beruht nun eben darauf, dafs er die gegenseitige Abhängigkeit aller dieser Sätze, von denen die wichtigsten und elementarsten in Pappos' Lemmata stehen, erkannt hat; mit Recht hat er dann den Schlufs gezogen, dafs alle die hier erwähnten Sätze in den *Porismen* standen und den Kern dieses Werkes bildeten.

Der weitere Schlufs, den wir ziehen können, ist, dafs die Griechen wahrscheinlich erkannten, dafs alle die Sätze aus der Ebene, die in den *Porismen* nur den Satz des Menelaos und den Doppelverhältnissatz voraussetzen, auf die Kugel direkt übertragbar sind, wenn man nur immer die Geraden mit den Sehnen des doppelten der entsprechenden Bogen ersetzt. Es ist nämlich kaum denkbar, dafs die Griechen, die die zwei Hauptsätze der *Porismen* aus der Ebene auf die Kugel übertrugen, nicht auch die daraus folgenden Konsequenzen erkannten. Es ist somit die Vermutung berechtigt, dafs schon vor Menelaos eine ziemlich entwickelte Kugelgeometrie existierte; es ist aber dies lediglich eine plausible Vermutung, zu deren Beweis uns die nötigen Belege fehlen.



Figur 60.

Mit III, 5 sind die sphärischen Haupttheoreme erledigt, und nun folgen mehrere wahrscheinlich aus der Ebene übertragene Sätze.

Menelaos III, 6 (Figur 60) sagt:

Wenn der Winkel am Scheitel eines sphärischen Dreiecks halbiert wird, ist das Sinusverhältnis der Basissegmente gleich dem der einschliefsenden Bogen.

Gegeben: $\angle ABD = \angle DBC.$

Zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin BC}{\sin DC}.$$

Durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke ABD und CBD erhält man sofort diese Proportion, indem die Winkel an B gleich sind, die an D Supplementwinkel.

Der umgekehrte Satz und der analoge für Halbierung des Aufsenwinkels werden auch bewiesen.

Den analogen Satz der Ebene (Euklid, *Elem.* VI, 3) hat Menelaos wahrscheinlich schon im ersten Buche auf die Kugel zu übertragen versucht. Erst hier ist es ihm gelungen, ein sphärisches Analogon, freilich in anderer Form, und zwar in der eines Sehnenverhältnisses statt eines Bogenverhältnisses, zu gewinnen.

Menelaos III, 7 (Figur 61) sagt:

Wenn wir vom Scheitel B eines sphärischen Dreiecks zwei Bogen ziehen (BD und BE), die mit den einschliefsenden Seiten (BA und BC) gleiche Winkel bilden, so wird bewiesen, dafs:

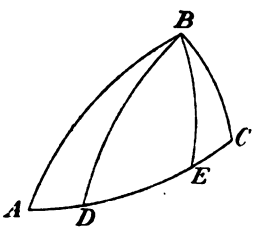
$$\frac{\sin EA \cdot \sin AD}{\sin DC \cdot \sin CE} = \frac{\sin^2 AB}{\sin^2 BC},$$

und umgekehrt, dafs, wenn diese Proportion besteht, die Winkel ABD und EBC gleich werden.

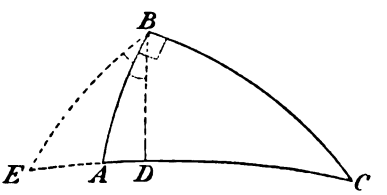
Bei der Erfindung dieses Satzes hat offenbar die Satzgruppe I, 26—35 eine Rolle gespielt.

Menelaos III, 8 (Figur 62) sagt:

Wenn in dem an B rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC durch B



Figur 61.



Figur 62.

zwei gröfste Kreisbogen gezogen werden, die mit BA gleiche Winkel bilden, so besteht die Proportion:

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA};$$

denn die beiden Verhältnisse sind gleich $\frac{\sin BE}{\sin BD}$ (III, 6).

Umgekehrt, wenn

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA}$$

und $\angle EBA = ABD$, wird bewiesen, dafs $\angle ABC = 90^0$, und wenn $\angle ABC = 90^0$, dafs $\angle EBA = ABD$; in beiden Fällen folgt der Beweis durch III, 6.

Die Sätze III, 7—8 sind offenbar wie III, 6 aus der Ebene übertragen; welchen Werken der Geometrie der Ebene Menelaos sie entnommen hat, können wir jedoch nicht konstatieren.

III, 8, der Satz von der *harmonischen Teilung* (BA und BC halbieren ja $\angle EBD$ und dessen Supplementwinkel), war wenigstens zur Zeit des Apollonios bekannt. Diesen Satz sowie die harmonische Teilung überhaupt scheint nämlich Apollonios genau erörtert zu haben, und zwar in

seinen *τόποι ἐπίπεδοι*.[174]) Die harmonische Teilung wurde auch in Apollonios' *Kegelschnittlehre* benutzt, und die harmonische Teilung einer Kegelschnittsehne durch Pol und Polar vielfach erörtert.[175]) Aber schon in Euklids *Porismen* wurde sicherlich die harmonische Proportion ausgiebig verwertet; denn von Pappos' Lemmata bezieht sich eine ganze Reihe auf die harmonische Teilung.[176]) Menelaos' Übertragung einer der allgemeinsten projektivischen Eigenschaften der harmonischen Proportion auf die Kugel suppliert somit die übrige Überlieferung und fügt ein bis jetzt fehlendes Glied hinzu; denn Menelaos' Beweis ist offenbar direkt aus der Ebene übertragen.

Den Beweis für III, 7 referierten wir nicht, weil derselbe kaum aus der Ebene übertragen ist; denn den analogen Satz der Ebene finden wir im Pappos[177]) als Lemma zu Theodosios' *Sphärik* III, 6, und zwar mit einem ganz anderen Beweis. Es ist von Simson[178]) angenommen worden, dafs dieser Satz in der verlorenen Schrift des Apollonios *„von dem bestimmten Schnitt"* (*περὶ διωρισμένης τομῆς*) stand. In der That finden sich ganz ähnliche Sätze unter Pappos' Lemmata[179]) zu diesem Werk, und da der Satz (in der Ebene) doch jedenfalls älter als Menelaos ist, dürfte Simsons Schlufs richtig sein. Bemerkenswert ist, dafs dieser Satz gerade zum Beweis desjenigen Lemmas im Pappos verwendet wird, aus welchem Zeuthen[180]) folgert, wie Apollonios in der Schrift vom bestimmten Schnitt einen Doppelpunkt in einer durch zwei Punktepaare gegebenen Involution bestimmt hat. Es ist ganz deutlich, dafs die Vorgänger des Menelaos, die zuerst die zu trigonometrischen Berechnungen verwendbaren kugelgeometrischen Sätze erfunden haben, so wie Menelaos selbst einen ausgiebigen Gebrauch der meistens verlorenen Schriften, die Pappos unter dem Namen *τόπος ἀναλυόμενος* zusammenfafst, gemacht haben. Auf der anderen Seite aber dient

174) Vgl. Eutokios' *Kommentar zu Apollonios, Apollonii Pergaei quae Graece exstant,* ed. Heiberg II, p. 180 ff. — Vgl. auch Chasles, *Les trois livres des Porismes,* p. 269 ff.; und Heiberg, *Litt. Stud.* p. 70—71.

175) Vgl. Apollonios, ed. Heiberg I, p. 102 und 386—412; vgl. auch Zeuthen, l. c. p. 59 und 82—84.

176) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 896—912 und 1266—1267; vgl. auch Chasles, *Porismes,* p. 79—81, 187—188, 210—211, 255—256, 261—262, 266—269, 273—278 und 317—320, wo die harmonische Teilung in Chasles' Restitution der *Porismen* vorkommt.

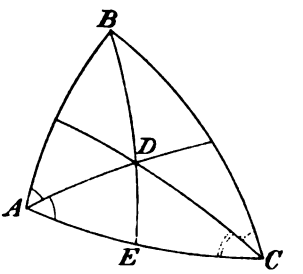
177) Pappos, ed. Hultsch, p. 488—490. Dieses Lemma ist nicht ein Hülfssatz zum Beweise des Theodosios, sondern zu einem neuen Beweis von Pappos zu Satz III, 6 des Theodosios; vgl. Pappos, p. 504.

178) Simson, *de sectione determinata, opera quaedam reliqua* p. 16.

179) Pappos, ed. Hultsch, p. 708—714, 718—722, 726 und 730—734.

180) Zeuthen, l. c. p. 132.

Menelaos' *Sphärik* dazu, uns zu bestätigen, daſs die Schlüsse, die namentlich von Forschern wie Chasles und Zeuthen in Bezug auf die verlorenen Schriften gezogen worden sind, im groſsen und ganzen richtig, und die gegen dieselben erhobenen Einwände und Zweifel unbefugt sind.



Figur 63.

Menelaos III, 9 (Figur 63) sagt:

Die Halbierungsbogen der Winkel eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Gegeben: $\angle BAD = DAC$

und

$$\angle BCD = DCA.$$

Wenn BDE gezogen wird, ist zu beweisen, daſs $\angle ABE = EBC$.

Beweis:

$$\frac{\sin BC}{\sin CE} = \frac{\sin BD}{\sin DE} = \frac{\sin BA}{\sin AE} \quad (\text{III}, 6),$$

also

$$\frac{\sin AE}{\sin CE} = \frac{\sin BA}{\sin BC},$$

d. h. $\angle ABE = EBC$ (III, 6, zweiter Teil) q. e. d.[181])

Der entsprechende Satz in der Ebene war Euklid bekannt, wie die Konstruktion *Elem.* IV, 4: *„in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben"* zeigt.

Menelaos III, 10 sagt:

Die Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Der lange, durch III, 1, 6, 8 und 9 geführte Beweis bietet kein besonderes Interesse.

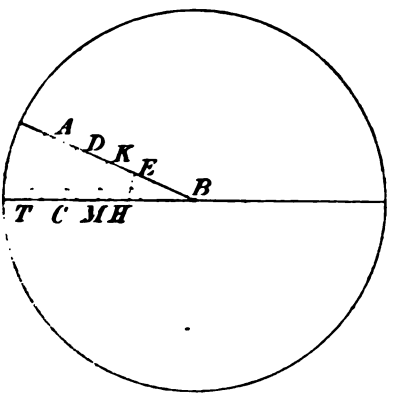
Daſs der entsprechende Satz in der Ebene dem Archimedes bekannt war, zeigt uns sein *„liber assumptorum"* 5—6.[182])

Die folgenden Sätze der *Sphärik*, III, 11—14 sind sehr eigentümlich und erinnern gleich an das zweite Buch. Es kommen hier wieder Theoreme vor, die als Dreiecksatheoreme formuliert sind, sich aber offenbar von astronomischen ableiten. Teilweise kommen wieder die Sätze vor, die wir von der *alten Sphärik* durch Euklids φαινόμενα, Theodosios' *Sphärik* bis zu Menelaos und Ptolemaios verfolgt haben; noch einmal werden Sätze über die Ungleichheit der den gleichen Ekliptikbogen entsprechenden Rektas-

181) Das Corollar zu III, 9 in der Halleyausgabe ist unecht.

182) Archimedis *opera*, ed. Heiberg II, p. 433 ff.

censions-, Obliquascensions- und Morgenweitendifferenzen bewiesen, und zwa merkwürdigerweise durch die vorhergehenden sphärisch-trigonometrische Haupttheoreme, ohne dafs ein astronomischer Begriff eingeführt wird, und ohn dafs ein einziges Berechnungsbeispiel vorkommt. Wie schon hervorgehobe verlieren diese Sätze jeden Wert, sobald die darin liegenden astronomische Probleme einmal rechnerisch behandel sind. Eine derartige Behandlungsweis schrieben wir oben dem Hipparch zu deswegen interessieren uns diese Sätz an sich nunmehr herzlich wenig, um s mehr aber gewisse Schlüsse in Bezug au die Trigonometrie der Ebene, die wi daraus ziehen können.



Figur 64.

III, 11 bezieht sich auf die Ver gleichung von Ekliptikbogen mit de Horizontalbogen, in welchen dieselbe aufgehen. Ist nämlich (Figur 64) BA die Ekliptik, BT der Äquator, so daf $AB > AT$ (d. h. der Beweis ist nur für Orte aufserhalb der Polarzone gültig), und sind die Winkel an T, C, M und H gleich und $\gtreqless 90^0$ (AT DC, KM und EH stellen also verschiedene Lagen des Horizontes dar), s ist zu beweisen:

$$\frac{DA}{KE} > \frac{AT \div DC}{KM \div EH}.$$

Der Beweis wird auf folgende Weise erledigt: Wenden wir III, 2 au die Dreiecke ABT, DBC, KBM und EBH an, die zwei gleiche Winke haben, so erhalten wir:

$$\sin BA : \sin BD : \sin BK : \sin BE = \sin AT : \sin DC : \sin KM : \sin EH$$

und daraus, sagt Menelaos, folgt direkt, weil $90^0 \geqq AB > AT$, was be wiesen werden soll, infolge des ersten Buches des .... (hier folgt ein un sicherer Buchtitel).

In Gerhards Übersetzung lautet diese Stelle so: *„Si ergo fuerit illu ita, tunc iam accidunt ex eo, quod diximus, omnia, quae nuper retulimus; c illud est, quia nos iam declaravimus istas res et omnes, quae sunt eis simi les, in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum.“*

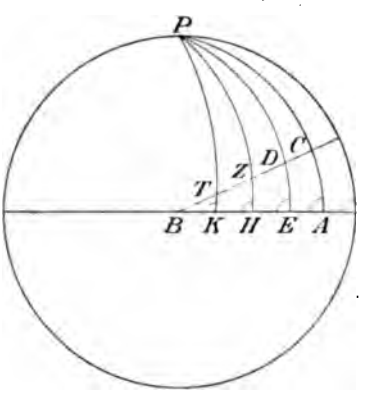
Nach Halleys Übersetzung[188]) aus dem Hebräischen ist der Titel: *„in prima parte libri lemmatum cyclicorum seu potius propositionum“*

188) Menelai *sphaerica*, ed. Halley, p. 98, 100 und 101.

eine Übersetzung, die Steinschneider[184]) jedoch mit *„Buch der bogenartigen Figuren"* ersetzen will. Diese Angaben sind sehr undeutlich und der ursprüngliche Titel ganz entstellt; Menelaos weist aber offenbar auf ein eigenes Werk von mehreren Büchern hin, dessen Inhalt sich zunächst auf die Verhältnisse zwischen Kreissehnen und den ihnen entsprechenden Bogen bezieht. Wir werden uns deswegen kaum irren, wenn wir die zunächstliegende Erklärung geben, nämlich dafs es sich hier um das von Theon[185]) erwähnte Werk des Menelaos: *„6 Bücher über die Geraden im Kreise"* handelt.

Nach Theons Bericht und dem Inhalt von Ptolemaios' *Syntaxis* I hat man geschlossen, dafs in diesem Werk eine Sehnentafel enthalten war. Dieser Schlufs ist sicherlich auch ganz zutreffend. Die Tafel allein und die Elemente zu deren Berechnung haben doch kaum 6 Bücher (bei Hipparch sogar 12) ausgemacht; über einiges von dem, was sonst in dem Werke stand, glaube ich nun hier in Menelaos III, 11 und den folgenden Sätzen Aufschlufs zu finden.

Ich werde unten, nachdem ich kurz die Sätze III, 12—14 referiert habe, alle die in 11—14 enthaltenen Voraussetzungen sammeln, die uns über die vorptolemaiischen plantrigonometrischen Werke Aufschlufs geben dürften.



Figur 65.

III, 12 bezieht sich auf die Vergleichung der Längen mit den entsprechenden Rektascensionen. In Figur 65 ist P Pol des Bogens BA. BA ist somit als der Äquator, BC als die Ekliptik aufzufassen. In der Voraussetzung, dafs $BC \leqq 90^0$, ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}.$$

1. Beweis: Durch Anwendung von III, 5 auf die Dreiecke ABC, EBD, HBZ und KBT erhält man:

$$\frac{\sin(BC+BA)}{\sin(BC-BA)} = \frac{\sin(BD+BE)}{\sin(BD-BE)} = \frac{\sin(BZ+BH)}{\sin(BZ-BH)} = \frac{\sin(BT+BK)}{\sin(BT-BK)},$$

und dann folgt der Beweis wegen des *„in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum"* Bewiesenen (vgl. oben).

184) Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482.
185) Theons *Kommentar*, ed. Halma, p. 110; vgl. oben Seite 5.

2. Beweis: III, 2 und 3 geben:

$$\frac{\sin AB}{\sin BE} = \frac{\sin AC}{\sin DE} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC} = \frac{\sin BC}{\sin BD} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC}$$ [185a])

(III, 3) (III, 2)

Da nun $90^0 > PD > PC$, so erhält man

$$\frac{\sin AB}{\sin BE} > \frac{\sin BC}{\sin BD}$$

und analog:

$$\frac{\sin BE}{\sin BK} > \frac{\sin BD}{\sin BT}$$

und:

$$\frac{\sin BK}{\sin BH} < \frac{\sin BT}{\sin BZ}.$$

Daraus folgt eine andere Reihe von Ungleichheiten, und zwar diese:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin AE}{\sin AH} &> \frac{\sin CD}{\sin CZ} \\ \frac{\sin AH}{\sin AK} &> \frac{\sin CZ}{\sin CT} \\ \frac{\sin AK}{\sin EK} &> \frac{\sin CT}{\sin DT} \\ \frac{\sin EK}{\sin HK} &> \frac{\sin DT}{\sin ZT} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und daraus folgert Menelaos gleich[186]) die Ungleichheit

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT} \quad \text{q. e. d.}$$

III, 13 bezieht sich auf die Vergleichung von Obliquascensions- und Rektascensionsdifferenzen für Orte der Polarzonen und für alle Teile des Tierkreises. Zum Beweis gehören nämlich 2 Figuren (66 und 67), in welchen BU als der Horizont, BA als der Äquator, BV als die Ekliptik (in Figur 66 ist BV der Kvadrant Jungfrau-Krebs, in 67 Widder-Zwillinge), VV als der Wendekreis, P als der Nordpol aufzufassen ist, während CA, DE, ZH und NL verschiedene Lagen des Horizontes sind. In beiden Fällen ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}.$$

185a) III, 2 giebt ja: $\frac{\sin AC}{\sin DE} = \frac{\sin BC}{\sin BD}$, d. h. Grundformel I (vgl. Seite 82) für Dreieck ADE, vorausgesetzt, daſs $BC = BA = 90^0$, die verwendbar ist zur Berechnung der Deklination eines Ekliptikpunkts durch Länge und Neigung; vgl. Seite 132.

186) Menelaos schlieſst wahrscheinlich so: Multiplizieren wir die linken sowie die rechten Seiten der Ungleichheiten (1), so erhalten wir $\frac{\sin AE}{\sin HK} > \frac{\sin CD}{\sin ZT}$ und daraus, wegen der gegebenen Voraussetzung, $\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}$.

III, 4 giebt:

$$\frac{\sin AT}{\sin BT} = \frac{\sin EJ}{\sin BJ} = \frac{\sin HK}{\sin BK}.$$

Wenn nun $TJ = JK$, so wird $AE > EH$; denn dann ist $BT \div BJ = BJ \div BK$; daraus folgt aber, da $AT > BT$ und $EJ > BJ$ und $HK > BK$, dafs

$AT \div EJ > EJ \div HK$,

d. h.

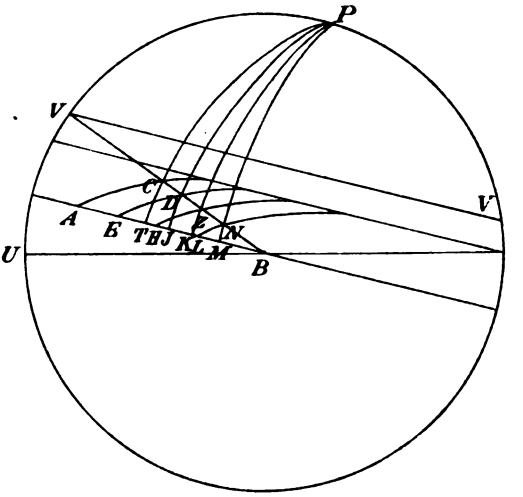
(Figur 66)

$AE \div TJ > EH \div JK$,

(Figur 67)

$AE + TJ > EH + JK$,

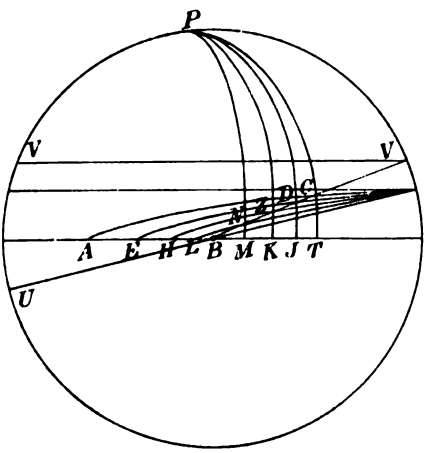
d. h. in beiden Figuren: $AE > EH$ q. e. d.



Figur 66.

Analog erhalten wir, wenn $AE = EH$, dafs dann $TJ < JK$, und in allen Fällen haben wir also: $\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}$.

Anm. Da wegen III, 12 $\frac{TJ}{JK} > \frac{CD}{DZ}$, so wird also auch $\frac{AE}{EH} > \frac{CD}{DZ}$, durch welche Ungleichheit die Obliquascensionen und die entsprechenden Längen verglichen werden.



Figur 67.

III, 14 bezieht sich auf Vergleichung von Obliquascensionen für verschiedene Orte. Es werden nämlich verglichen: 1) Die Obliquascensionen für zwei Orte der Polarzonen (Figur 68 links), 2) Die Obliquascensionen für zwei Orte aufserhalb der Polarzonen (Figur 68 rechts). Der Satz ist wie gewöhnlich als Dreieckstheorem formuliert[187]) (diesmal in Bezug auf das Dreieck ABC), ist aber offenbar von einem astronomischen abgeleitet, da BA als der Äquator, BC als die Ekliptik auf-

187) Es wird sogar speziell bewiesen, wie es sich verhält, wenn $\angle B = 90°$, ein Fall, der offenbar von der Astronomie nicht abgeleitet sein kann.

zufassen ist. CA, EH und ZT sind verschiedene Lagen des Horizontes für eine Polhöhe, CD, EK und ZL für eine andere.

1. (Figur 68 links.)

Gegeben ist:

$$90^0 \geqq CA > CD \geqq CB, \quad \angle A = H = T \quad \text{und} \quad \angle D = K = L.$$

Zu beweisen ist dann:

$$\frac{AH}{HT} > \frac{DK}{KL}.$$

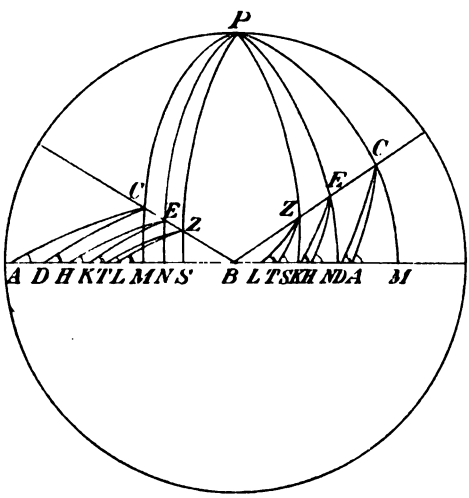
Beweis: III, 4 giebt, wenn CM, EN und ZS senkrecht auf BA stehen:

$$\frac{\sin AM}{\sin BM} = \frac{\sin HN}{\sin BN} = \frac{\sin TS}{\sin BS} \tag{1}$$

und:

$$\frac{\sin DM}{\sin BM} = \frac{\sin KN}{\sin BN} = \frac{\sin LS}{\sin BS}, \tag{2}$$

und daraus folgt, da $90^0 \geqq AM > DM \geqq BM$, dafs:



Figur 68.

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} > \frac{BD \div BK}{BK \div BL},$$

d. h. $\frac{AH}{HT} > \frac{DK}{KL}$ q. e. d.

2. (Figur 68 rechts.)

Gegeben ist: $90^0 \geqq CB > CD > CA$, $90^0 < \angle CAB = EHB = ZTB$, $90^0 < \angle CDB = EKB = ZLB$.

Zu beweisen ist: $\frac{AH}{HT} < \frac{DK}{KL}$.

Beweis: III, 4 giebt wieder die obigen Gleichungen (1) und (2); da aber diesmal $90^0 \geqq BM > BA > BD$, so wird

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} < \frac{BD \div BK}{BK \div BL}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{AH}{HT} < \frac{DK}{KL} \quad \text{q. e. d.}$$

Es ist deutlich, dafs alle die Beweise der Sätze III, 11—14 auf Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene beruhen. Diese Voraussetzungen sind, insoweit ich sie nach den mir bis jetzt vorliegenden Menelaostexten feststellen kann, folgende:

Wenn wir auf einem Kreise zwei Reihen von Bogengröfsen haben, wie

$$90^0 \geqq a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

und

$$90^0 > b_1 > b_2 > b_3 > b_4,$$

und zwar so, dafs immer

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \quad a_3 > b_3, \quad a_4 > b_4,$$

so lassen sich aus folgenden Sinusverhältnissen folgende Ungleichheiten von Bogengröfsen beweisen:

1. Wenn

$$\sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 : \sin a_4 = \sin b_1 : \sin b_2 : \sin b_3 : \sin b_4,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 11 und 13).

Anm. Eigentlich schliefst Menelaos nicht direkt so, sondern auf folgende Weise:

Wenn unter den gegebenen Voraussetzungen $a_1 \div a_2 = a_3 \div a_4$, so folgt $b_1 \div b_2 < b_3 \div b_4$, wenn aber $b_1 \div b_2 = b_3 \div b_4$, so folgt $a_1 \div a_2 > a_3 \div a_4$, und dann allgemein („*omnino*"):

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4};$$

auch in den übrigen Fällen ist die Schlufsreihe dieselbe.

2. Wenn

$$\frac{\sin (a_1 + b_1)}{\sin (a_1 \div b_1)} = \frac{\sin (a_2 + b_2)}{\sin (a_2 \div b_2)} = \frac{\sin (a_3 + b_3)}{\sin (a_3 \div b_3)} = \frac{\sin (a_4 + b_4)}{\sin (a_4 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[1]).

3. Wenn

$$\frac{\sin (a_1 \div a_2)}{\sin (a_3 \div a_4)} < \frac{\sin (b_1 \div b_2)}{\sin (b_3 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[2]).

Haben wir ferner auf demselben Kreise drei Reihen von Bogengröfsen, wie:

$$a_1 > a_2 > a_3,$$
$$b_1 > b_2 > b_3$$

und

$$90^0 > c_1 > c_2 > c_3,$$

und wenn:

$$\sin (a_1 \div c_1) : \sin (a_2 \div c_2) : \sin (a_3 \div c_3)$$
$$= \sin (b_1 \div c_1) : \sin (b_2 \div c_2) : \sin (b_3 \div c_3) = \sin c_1 : \sin c_2 : \sin c_3,$$

so wird, wenn:

$$a_1 > b_1 > 2c_1,$$
$$a_2 > b_2 > 2c_2$$

und

$$a_3 > b_3 > 2c_3,$$

auch

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} > \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[1]).

Wenn dagegen:

$$b_1 < a_1 < c_1,$$
$$b_2 < a_2 < c_2$$

und

$$b_3 < a_3 < c_3,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} < \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[2]).

Halley, der bei seiner Ausgabe diese Voraussetzungen offenbar genau geprüft hat, giebt als Lemmata, die zum Verständnis dieses Teils der *Sphärik* nützlich sind, folgende an:

1. Wenn $a > b$, so wird $\frac{a}{b} > \frac{\sin a}{\sin b}$.

Dieser Satz wird in Menelaos III, 15 (vgl. unten Seite 119 und 121) mehrmals vorausgesetzt; auch findet er sich in Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 10 (ed. Halma I, p. 34—35; ed. Heiberg I, p. 43—44)[188]); der Satz wird hier zu der annähernden Berechnung von crd. 1^0 verwendet. Diese Anwendung bildet den Abschluſs von Ptolemaios' Einleitung zur Sehnentafel; in seinen gleich folgenden Worten: „*ἡ μὲν οὖν πραγματεία τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν οὕτως ἂν οἶμαι ῥᾷστα μεταχειρισθείη*“ finde ich eine Andeutung davon, daſs dieser und ähnliche Sätze auch *vor* Ptolemaios zur Berechnung von Sehnentafeln gebraucht wurden, und daſs die älteren Methoden umständlicher als seine waren.

2. Die einfache Erweiterung von 1, nämlich: wenn $a > b > c \cdots$, so wird $\frac{a}{\sin a} > \frac{b}{\sin b} > \frac{c}{\sin c} \cdots$,

die Halley auch anführt, finde ich nicht unter den Voraussetzungen im Menelaos.

---

188) Der Satz wird schon von Aristarch von Samos (c. 270 v. Chr.) verwendet; vgl. *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης*, ed. Wallis, 1699.

3. Halley giebt ferner an:

Wenn $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin d}$ und $\sin a > \sin b > \sin c > \sin d$, so wird

$$\frac{a \div b}{c \div d} > \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{\sin (a \div b)}{\sin (c \div d)}.$$

Auch diese Ungleichheiten finden wir nicht im Menelaos direkt angewandt.

Es ist möglich, dafs alle die von Menelaos aus der Trigonometrie der Ebene vorausgesetzten Sätze sich auf solche einzelnen zurückführen lassen. Ein Versuch, eine solche Zurückführung durchzuführen, hat aber zunächst geringeren Wert, und läfst sich erst zu Ende bringen, wenn die Menelaostexte (der lateinische und die arabischen) miteinander verglichen sind, so dafs es möglichst sicher festgestellt ist, in welcher *Form* die Voraussetzungen im Menelaos gegeben sind. Bis dahin müssen wir uns mit den obigen Angaben begnügen.

Eine Frage erhebt sich jedoch hier: Finden wir nicht in der Litteratur vor Menelaos ähnliche Sätze, wo Bogenlängen und Geraden mit einander verglichen werden?

Aufser dem schon erwähnten Satz des Theodosios (III, 11)[189]), der, wie wir unten sehen werden, dem Apollonios beigelegt wird[190]), treffen wir von Sätzen dieser Art nur diejenigen, auf denen die Methoden von Aristarch und Archimedes[191]) beruhen. Es sind dies aber aufser dem auf der vorhergehenden Seite referierten nur zwei sehr alte Sätze, die in der griechischen Geometrie eine überaus reiche Anwendung gefunden haben, und deren einer auch in Theodosios III, 11 gebraucht wurde.

Dieser Satz sagt: Wenn die zwei an B und B_1 rechtwinkligen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Katheten AB und A_1B_1 gleich, die Katheten BC B_1C_1 dagegen ungleich haben, und zwar $B_1C_1 > BC$, so wird

$$\frac{B_1C_1}{BC} > \frac{\angle C}{\angle C_1}.$$

Dieser Satz, der dem unsrigen

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} > \frac{y}{x} \quad (\text{für } 90^0 > y > x)$$

gleichkommt, wird von Hultsch als sehr alt betrachtet. Er hat ihn näm-

---

189) Vgl. oben Seite 79. 190) Vgl. unten Seite 117.

191) Archimedes, κύκλου μέτρησις, ed. Heiberg, p. 258—270.

lich unter den *„Lemmata zur Sphärik"*[192]) gefunden und setzt ihn deswegen vor Autolykos. Obwohl ich nicht mit Hultsch diese Lemmata als voreuklidische betrachten kann, gebe ich doch zu, dafs der hier erwähnte Satz alt ist; denn er wird von Archimedes[193]) als bekannt vorausgesetzt, wie schon Hultsch bemerkt hat. Man hat aber, glaube ich, übersehen, dafs der Satz in Euklids *Optik*[194]) bewiesen (*nicht* vorausgesetzt) wird. Der andere Satz ist der Seite 112 referierte:

$$\frac{y}{x} > \frac{\sin y}{\sin x} \left(\text{für } 90^0 > y > x\right),$$

den wir schon bei Aristarch treffen, jedoch ohne Beweis. In der *Syntaxis* findet sich aber dieser Beweis (vgl. Seite 82 und 112).

Die hier referierten Sätze, die in der ältesten Zeit die Trigonometrie ersetzten, lieferten vielleicht brauchbare Hülfsmittel bei den ersten Versuchen, sich eine trigonometrische Methode zu verschaffen, sind aber zu alt, dafs man zur Zeit ihrer Erfindung Werke wie das, welchem Menelaos die obigen Voraussetzungen entnommen hat, gehabt haben kann. Ich glaube deswegen, dafs *wir in Menelaos' Sphärik die frühesten Spuren eines plantrigonometrischen Werkes treffen,* und dafs dieses Werk, wie oben gesagt, das von Theon erwähnte ist.

Menelaos III, 15, der letzte Satz in der *Sphärik* ist in vier Teile geteilt. In Nasr-Mansurs Redaktion sind diese als III, 22—25 numeriert. Wir folgen Gerhard, dessen Übersetzung mit der Halleyausgabe übereinstimmt, und bezeichnen die Teile als III, 15^{1-4}.

III, 15^1 sagt: *Gegeben zwei gröfste Kreisquadranten BA und BC. Vom Pol P des Kreises BA sind zwei gröfste Kreisbogen gezogen, die von*

---

192) Vgl. Note 96. Dafs dieses Werk mit demjenigen, welchem Menelaos seine plantrigonometrischen Voraussetzungen entnommen hat, identisch ist, möchte ich bezweifeln. Die Fragmente aus den *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, die Hultsch gefunden hat, beziehen sich nämlich, wie Heiberg nachgewiesen hat (vgl. Heiberg, *Jahresberichte,* Philologus **48**, p. 496—497), alle auf Theodosios' *Sphärik*. Mit den *„σφαιρικά"* meinen die griechischen Autoren auch die des Theodosios oder die alten voreuklidischen, kaum aber die des Menelaos. Endlich, wenn diese *λήμματα*, wie Hultsch vermutet, vor Autolykos existierten, ist es ausgeschlossen, dafs sie eine schon entwickelte Trigonometrie der Ebene enthielten; wenn sie auf der anderen Seite neueren Datums sind, was ich wegen des hier erwähnten Lemmas zu Theodosios III, 11, welcher Satz kaum älter als Apollonios ist, vermute (vgl. unten Seite 117), so mufs man sie zunächst als eine zur Zeit eines Pappos zu Schulzwecken verfafste Sammlung betrachten; in keinem Falle haben diese *λήμματα* dann irgend etwas mit den Voraussetzungen des Menelaos zu thun.

193) Archimedes, ed. Heiberg II, p. 260 (d. h. *φαμμίτης* I, 21).

194) Euclidis *opera,* ed. Heiberg VII, p. 14 (d. h. *Optik* Satz 8).

BA und BC bezw. in A_1, A_3 und C_1, C_3 geschnitten werden. Den Kugeldurchmesser nennen wir $2r$, die Durchmesser der mit BA parallelen Kreise durch C, C_1 und C_3 nennen wir bezw. 2ϱ, $2r_1$ und $2r_3$. Dann ist zu beweisen, dafs (Figur 69)

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3}. \tag{1}$$

Beweis:

Da $\angle PCB = PA_3B = 90^0$ und $\angle CC_3P = BC_3A_3$, so wird, wenn III, 2 auf $\triangle PCC_3$ und $\triangle BA_3C_3$ angewandt wird:

$$\frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3}. \tag{2}$$

III, 1 ($\triangle BC_1A_1$ durch PC_3A_3 geschnitten) giebt aber:

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3} \tag{3}$$

$$= \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3},$$ [195])

also auch

$$\frac{\sin A_3 A_1}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} \quad \text{q. e. d.}$$

Bei diesem Beweise ist zuerst die Hauptgleichung (1) beachtenswert, weil sie für die Berechnung gewisser astronomischen Tafeln sehr geeignet ist.

Fassen wir z. B. BC als die Ekliptik, BA als den Äquator auf, so wird man mit (1) die den Längen BC_3, C_3C_1 u. s. w. entsprechenden Rektascensionen BA_3, A_3A_1 u. s. w. leicht berechnen können. Die Rektascensionstafel in Ptolemaios' *Syntaxis*[196]), wo die jedem Ekliptikbogen von 10^0 zugeordnete Rektascension durch Menelaos' Satz auf ziemlich schwerfällige Weise berechnet wird, läfst sich mit Hülfe von III, 15^1 so herleiten:

(1) giebt: $\sin A_1 A_3 = r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3}$.

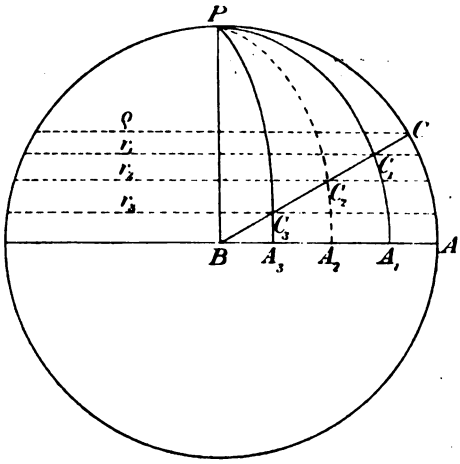
$r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3$ ist aber konstant, da $C_1 C_3$ immer gleich 10^0 bleibt, r_1 und r_3 sind die Sinusse zu den Zenithdistanzen PC_1 und PC_3, d. h. die

---

195) Wie ich immer *Sinus* statt *Sehne des doppelten Bogens* geschrieben habe, so werde ich auch *Halbmesser* statt *Durchmesser* schreiben, obwohl Menelaos immer in diesen und den folgenden Beweisen *Durchmesser* sagt. Da er fast immer mit Verhältnissen operiert, so macht es in der That keinen Unterschied, und ich ziehe der Übersichtlichkeit wegen die dem modernen Leser zunächstliegende Schreibweise vor.

196) Die Rektascensionstafel steht in der *Syntaxis* II, cap. 8, ed. Heiberg I, p. 134—135; ed. Halma I, p. 103. Die Berechnungsbeispiele zu derselben sind schon in I, cap. 16 (Halma I, cap. 13) erledigt, ed. Heiberg I, p. 82—85; ed. Halma I, p. 60—63.

Cosinusse zu den Deklinationen A_1C_1 und A_3C_3, die man in der Deklinationstafel findet, und zwar braucht man für jede Rechnung nur einmal nachzuschlagen. Wir werden kaum zu viel wagen mit der Behauptung, daſs wir in (1) eine wenigstens von Menelaos angewandte Berechnungsformel[197]) vor uns haben. Die Formel kann aber von einer älteren Zeit herstammen, obwohl wir annehmen müssen, daſs der im Beweise angewandte Satz III, 2 von Menelaos erfunden ist; denn die Anwendung von III, 2 läſst sich durch zweimalige Anwendung von III, 1 ersetzen, und zwar indem (Figur 69) $\triangle ABC$ durch PC_3A_3 und $\triangle BA_3C_3$ durch PCA geschnitten werden, woraus die Relation (2) folgt.



Figur 69.

Eigentümlich ist es, daſs Menelaos in III, 15 die Parallelkreisdurchmesser als trigonometrische Funktion verwendet. Auch in Theodosios III, 11—12 werden, wie wir gesehen haben[198]), die Durchmesser zur Vergleichung von Bogenlängen und Geraden eingeführt. Bemerkenswert ist deshalb folgender Passus, den Menelaos[199]) gleich nach dem Beweis der Formel (1) folgen läſst.

„Et iam declaratur ex eo quod diximus in figuris primis[200]) *ex figuris tractatus tertii libri Theodosii in speris per modum alium. Ipse enim declaravit ibi, quod proportio arcus gh* (bei uns A_1A_3) *ad arcum de* (C_1C_3) *est minor proportione diametri spere* ($2r$) *ad diametrum circuli* (2ϱ), *qui contingit circulum bc super punctum c*“, d. h. $\frac{\smile A_1A_3}{\smile C_1C_3} < \frac{2r}{2\varrho}$. In Theodosios III, 11 wird allerdings nur der Spezialfall $\frac{\smile AA_3}{\smile CC_3} < \frac{2r}{2\varrho}$ bewiesen. Dieser Unterschied will jedoch wenig besagen, denn Menelaos weist jedenfalls auf Theodosios III, 11 hin.

197) Vielleicht hat Menelaos eine Formel wie diese (1) in seiner mehrmals erwähnten Abhandlung über die Auf- und Untergänge der Tierkreiszeichen benutzt.

198) Vgl. oben Seite 79—80.

199) Ich gebe die Stelle nach Gerhards Übersetzung. Der Passus stand auch in der hebräischen Übersetzung des Jacob ben Machir; vgl. die Halleyausgabe, p. 108—109.

200) Die Worte *„in figuris primis“* beruhen wahrscheinlich auf einem Mifsverständnis von Gerhard. Bei Halley steht *„Propositio principalis“*, was offenbar das Richtige ist.

Menelaos fährt fort: *„et hec est res, qua usus est Apollonius in libro, qui dicitur* **liber aggregativus**[201]*), et nos iam usi sumus hoc hic, et indiguimus eo necessitate maioris iuvamenti; et nos ostendimus illud in eo, quod erit post, cum demonstratione communi"*.

Die Hinweisung auf Theodosios findet sich auch im Cod. Leid. 930 (Nasr-Mansurs Redaktion), die Anspielung auf Apollonios, der Theodosios III, 11 in einem *„liber aggregativus"* (?) soll *verwendet haben* (wozu?), dagegen nicht. Bis mehrere arabische Handschriften untersucht worden sind, müssen wir deswegen die Echtheit dieses Passus sowie die Erklärung des Buchtitels *„liber aggregativus"* dahingestellt sein lassen.[202])

Es wird sich wohl zuletzt ergeben, dafs die ersten Elemente der Trigonometrie, wie Tannery[203]) vermutet, sich auf Apollonios als Erfinder zurückführen lassen.

Was wir aber kaum bezweifeln können, ist, dafs der Schlufs von Menelaos' *Sphärik* III, 15^{1-4}, der in der That einen von den vorhergehenden Sätzen deutlich abweichenden Charakter hat, eine Neubehandlung und Vervollkommnung von älteren primitiveren Methoden enthält. Vergleichen wir Theodosios III, 11—12 und Menelaos III, 15^{1-4}, so scheint aus dieser Vergleichung hervorzugehen, *dafs der Kugel- und die Parallelkreisdurchmesser die ältesten Mittel zum Vergleich von Bogenlängen mit Geraden lieferten, d. h. dafs sie gewissermafsen als die ältesten trigonometrischen Funktionen zu betrachten sind.*

Wenn das richtig ist, *so entstand die Trigonometrie aus den Betrach-*

201) Bei Halley, p. 108, heifst dieser Titel (aus dem Hebräischen) übersetzt: *„Liber* (forte) *de principiis universalibus"*. Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482, meint, dafs das betreffende hebräische Wort eine allgemeine Bedeutung hat, wie *„umfassende"* oder dergleichen.

202) Ich vermute, dafs die Stelle wirklich in Menelaos' *Sphärik* stand. Wenn sie aber auch eine arabische Interpolation ist, so hat der betreffende Araber wohl authentische Berichte vor sich gehabt. — Der Titel *„liber aggregativus"* liefse sich wohl als eine Übersetzung von „ἡ καθόλου πραγματεία" erklären; vgl. Marinos' *Kommentar zu Euklids Data*, ed. Menge, p. 234; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 133. — Wir erinnern auch an das von Eutokios dem Apollonios zugeschriebene Werk mit dem rätselhaften Titel „ὠκυτόκιον", wo eine Berechnung von π erledigt werden soll; vgl. Archimedes, ed. Heiberg III, p. 300; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 124 ff. Die Fragmente dieser Werke, die man (Tannery und Heiberg) im Pappos zu finden geglaubt hat, lassen sich jedoch kaum mit der Stelle im Menelaos in Übereinstimmung bringen. — Die Hinweisungen auf ein astronomisches Werk des Apollonios, vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Halma II, p. 312 ff., dessen Titel nicht angeführt wird, verbreiten auch über die Erklärung der Menelaosstelle kein Licht.

203) Vgl. Tannery, *l'astr. anc.* p. 68.

tungen, wozu die sphärisch-astronomischen Figuren Anlafs gaben[204]*), un später, da man die Berechnung von den Durchmessern an einen Kreis i der Ebene anknüpfte, gingen die Durchmesser naturgemäfs in Kreissehnen übe*

Noch eins können wir in Bezug auf den Beweis III, 15[1] bemerken:

In der obigen Gleichung (2): $\frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3}$ liegt implicite ei Dreiecksformel, die von den Arabern oft zu Berechnung verwendet wurd nämlich für das Dreieck BA_3C_3 mit den Seiten b_3, a_3, c_3 die Formel:

$$\frac{\cos B}{\cos b_3} = \frac{\sin c_3}{\sin a_3}.$$

Nach v. Braunmühls[205]) Angabe ist Ibn-Junos († 1008) der erst der diese Formel gebrauchte.

Menelaos III, 15[2] (Figur 69):

Ziehen wir den gröfsten Kreisbogen PC_2A_2, so dafs

$$\sin^2 PC_2 = \sin PA_2 \cdot \sin PC \qquad (1)$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, dafs

$$r_2^2 = r \cdot \varrho,$$

so kann man beweisen, dafs $\smile BC_2 \dot{-} BA_2$ ein Maximum oder, wie Menelaos sagt, *dafs diese Differenz eine gegebene Gröfse ist, und zwar gröfs als die Differenz irgend zweier anderen ähnlich liegenden Bogen*, d. h.

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_3 \dot{-} BA_3$$

und

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_1 \dot{-} BA_1.$$

Beweis:

$$\frac{\sin PA_2}{\sin PC_2} = \frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} \quad \text{(III, 2)}^{205a}) \qquad (2)$$

$$\frac{\sin PC_2}{\sin PC} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2} \quad \text{(III, 2)} \qquad (3)$$

Wegen (1) werden (2) und (3) gleich, d. h.

$$\frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2},$$

204) Vgl. oben Seite 80.

205) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 62.

205a) Die Gleichung (2) kommt der Grundformel III (vgl. Seite 82) gleic und zwar für Dreieck BA_2C_2, und ist leichter zu benutzen als Menelaos' Sa bei der Bestimmung des Horizontbogens (zwischen dem Äquator und dem Wend kreis) durch die Neigung der Ekliptik und die Dauer des längsten Tages (*Syntax* II, cap. 2, ed. Heiberg I, p. 89 ff.).

folglich wird, da $\smile BA = BC = 90^0$, auch

$$\smile CC_2 = BA_2 \text{ und } AA_2 = BC_2.$$[206])

Ferner bekommen wir durch (1):

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin^2 PA_2}{\sin^2 PC_2} = \frac{\sin^2 AA_2}{\sin^2 CC_2},$$

d. h. $\frac{r+\varrho}{r-\varrho} = \frac{r^2}{\sin^2 AA_2 \dot{-} \sin^2 CC_2}$, weil $\sin^2 CC_2 + \sin^2 AA_2 = r^2$.[207])

Indem nun r und ϱ „gegeben" sind, ist auch $\sin^2 AA_2 \dot{-} \sin^2 CC_2$ „gegeben". Daraus schliefsen wir, dafs $\sin AA_2$ und $\sin CC_2$, ferner AA_2 und CC_2 „gegeben" sind; d. h. die Bogendifferenz $AA_2 \dot{-} CC_2 = BC_2 \dot{-} BA_2$ *ist eine durch r und ϱ gegebene Gröfse* q. e. d.

Nun geben aber III, 15[1] und die gegebene Gleichung (1):

$$\frac{\sin A_1A_2}{\sin C_1C_2} = \frac{\sin PA \cdot \sin PC}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin^2 PC_2}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin PC_2}{\sin PC_1},$$

und da $PC_2 > PC_1$, so wird $A_1A_2 > C_1C_2$; analog wird bewiesen, dafs $A_3A_2 < C_3C_2$, und es folgt also:

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_1 \dot{-} BA_1$$

und

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_3 \dot{-} BA_3,$$

d. h. $\smile BC_2 \dot{-} BA_2$ *ist ein Maximum*, da PC_1A_1 und PC_3A_3 ganz willkürlich gezogen sind q. e. d.

Auch dieses Theorem kann als ein astronomisches aufgefafst werden und giebt dann an, zu welcher Zeit die Differenz zwischen Sonnenlänge und Sonnenrektascension am gröfsten ist. Man fällt aber kaum auf diese Grenzbestimmung, ohne zuvor die Rektascensionen berechnet zu haben. Hat man aber einmal eine Tafel wie die Rektascensionstafel in der *Syntaxis* berechnet, so liegt die Erfindung dieses Satzes ganz nahe.

Bemerkenswert bei diesem Beweise ist ferner, dafs wir hier eine trigonometrische Bestimmung finden, deren Berechnung nicht durchgeführt wird, indem nur die Möglichkeit einer solchen angegeben wird durch die Bemerkung, dafs die betreffende Gröfse „gegeben" ist.

Es erinnert uns dies an die trigonometrische Bestimmungsweise in Ptolemaios' *Analemma.*[208]) Da die Angaben hier im Menelaos deutlicher sind,

206) Die Gleichung $\frac{\text{crd}.2x}{\text{crd}.2y} = \frac{\text{crd}.(180^0 \dot{-} 2y)}{\text{crd}.(180^0 \dot{-} 2x)}$ (4) läfst nämlich, wie leicht geometrisch zu zeigen ist, nur die Möglichkeiten $x = y$ oder $x = 90^0 \dot{-} y$ zu; $x = y$ (d. h. $AA_2 = CC_2$) ist aber in diesem Falle unmöglich. Im Folgenden (vgl. Note 212) findet sich als Voraussetzung aus der Trigonometrie der Ebene eine Verallgemeinerung dieses Satzes.

207) Es ist dies die Grundformel 2 (siehe Seite 82): $\sin^2 x + \sin^2(90^0 \dot{-} x) = 1$.

208) Vgl. oben Seite 83.

bestätigen sie indessen die Richtigkeit von Zeuthens Auffassung der Analemmakonstruktionen.

Eine weitere Bestätigung davon, daſs das Wort *δεδομένον* (datum), dessen Bedeutung ursprünglich zunächst *„konstruierbar“* war, später die Bedeutung *„numerisch berechenbar“*, ja sogar wie hier *„annäherungsweise berechenbar“* erhielt, finden wir in Marinos' *Kommentar zu Euklids Data* (ed. Menge p. 234). Bei einer Erörterung der verschiedenen Bedeutungen des Wortes *δεδομένον* sagt Marinos nämlich: „... *οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· οὕτω γὰρ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον ἤτοι πρὸς ἀκρίβειαν ἢ τὸ σύνεγγυς.*“

Die Zeit des hier erwähnten Diodoros kennen wir nicht; wir wissen nur, daſs er wie Ptolemaios ein *Analemma* verfaſste.[209]) *Die* Bedeutung des Wortes *δεδομένον*, an die Marinos hier erinnert, scheint also durchaus mit den Analemmakonstruktionen in Verbindung zu stehen

Menelaos III, 15[3–4] bildet den Schluſs des dritten Buches. Es wird hier das genauer erörtert, was Theodosios nur teilweise bewiesen hat, nämlich daſs das Verhältnis $\frac{\smile A_1A_3}{\smile C_1C_3}$ (Figur 69—70) zwischen zwei bestimmten Grenzen liegt, indem

1) für $A_1A_3 > C_1C_3$, $\quad \frac{r\cdot\varrho}{r_1\cdot r_3} < \frac{A_1A_3}{C_1C_3} < \frac{r}{r_1}$

2) für $A_1A_3 < C_1C_3$, $\quad \frac{\varrho}{r_3} < \frac{A_1A_3}{C_1C_3} < \frac{r\cdot\varrho}{r_1\cdot r_3}$

3) für $BC_1 = 90^0$, d. h. C_1 fällt in C,
4) für $BC_1 \div 90^0 = 90^0 \div BC_3$, d. h. C in der Mitte von C_1C_3, $\quad \frac{r}{r_3} < \frac{A_1A_3}{C_1C_3} < \frac{r}{\varrho}$

5) für $BC_1 \div 90^0 \gtrless 90^0 \div BC_3$, d. h. C zwischen C_1 und C_3, nur nicht in der Mitte, $\quad \frac{r}{r_1} < \frac{A_1A_3}{C_1C_3} < \frac{r}{\varrho}$

(A)

Von Interesse ist lediglich der Beweis, daſs $\frac{\smile A_1A_3}{\smile C_1C_3} > \frac{\varrho}{r_3}$, wenn $\smile A_1A_3 < C_1C_3$.

Beweis: Man zieht (Figur 70) die gröſsten Kreisbogen PC_4A_4 und PC_5A_5, so daſs C_4 zwischen C_3 und C_2 fällt, und so[210]), daſs

209) Vgl. Pappos, ed. Hultsch III, Praefatio, p. IX—XI.

210) Menelaos drückt sich an dieser Stelle undeutlich aus, was dem Abu-Nasr-Mansur zu einer berechtigten Kritik Anlaſs giebt.

$$r \cdot \varrho = r_2^2 = r_3 \cdot r_5 = r_1 \cdot r_4, \qquad (1)$$

d. h. $\sin PA \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_3 \cdot \sin PC_5 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_4$.

Dann wird $\smile A_1A_4 = C_1C_4$ und $\smile A_3A_5 = C_3C_5$ [direkte Folge von (1) und III, 15^1, wonach

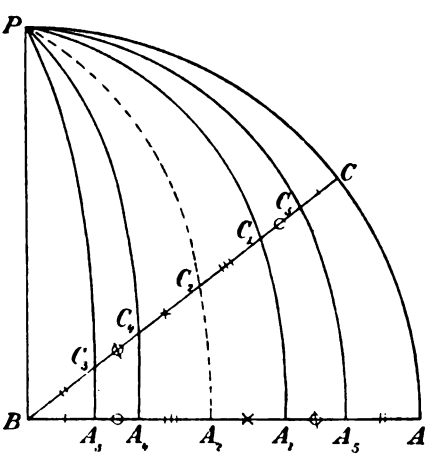
$$\frac{\sin A_1A_4}{\sin C_1C_4} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_4} \quad \text{und} \quad \frac{\sin A_3A_5}{\sin C_3C_5} = \frac{r \cdot \varrho}{r_3 \cdot r_5}\Big].$$

„Nun wird", sagt Menelaos[211]): *„infolge des einschlägigen Beweises in geraden Linien"* entweder $\smile C_3C_4 = A_1A_5$ oder $\smile C_3C_4 = A_3A_4$; da aber $\smile C_3C_4 > A_3A_4$, so mufs $\smile C_3C_4 = A_1A_5$ sein, und daraus folgt, dafs

$$\smile C_1C_5 = A_3A_4,$$
$$\smile C_5C_4 = A_3A_1$$

und

$$\smile C_1C_3 = A_5A_4.$$



Figur 70.

Schliefslich bekommen wir:

$$\frac{\smile C_1C_3}{\smile A_1A_3} = \frac{\smile A_5A_4}{\smile C_5C_4} < \frac{r}{r_5} = \frac{r_3}{\varrho}$$

[vgl. (A)[1]], d. h.

$$\frac{\smile A_1A_3}{\smile C_1C_3} > \frac{\varrho}{r_3} \qquad \text{q. e. d.}$$

Wie der in diesem Beweis angewandte plantrigonometrische Satz formuliert war, ist nicht unmittelbar einleuchtend. Dafs jedoch die Schlufsreihe richtig ist, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Wir haben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin C_3C_4}{\sin A_3A_4} &= \frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho} \\ \frac{\sin A_1A_5}{\sin C_1C_5} &= \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III, } 15^1\text{)};$$

da aber $\frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5}$, so wird $\frac{\sin C_3C_4}{\sin A_3A_4} = \frac{\sin A_1A_5}{\sin C_1C_5}$, oder wie Menelaos sagt: $\frac{\text{crd. } 2C_3C_4}{\text{crd. } 2A_3A_4} = \frac{\text{crd. } 2A_1A_5}{\text{crd. } 2C_1C_5}$ $(= \mu)$; aufserdem wissen wir, dafs

---

211) Bei Gerhard lautet diese Stelle so: *„Et propterea quod hec forma est sicut ipsa est, declaratur in lineis rectis, quod arcus le* (C_3C_4) *est equalis uno duorum arcuum* $\overline{gm}$, $\overline{nh}$ (A_1A_5, A_3A_4). *Verum ipse est maior arcu* $\overline{nh}$ (A_3A_4), *ergo argus* $\overline{el}$ (C_3C_4) *est equalis arcui* $\overline{gm}$ (A_1A_5) ...."

$2C_3C_4 + 2C_1C_5 = 2A_3A_4 + 2A_1A_5$ $(= k^0)$, und es läfst sich nun graphisch[212]) nachweisen, dafs entweder

$$\smile C_3C_4 = A_3A_4$$

oder

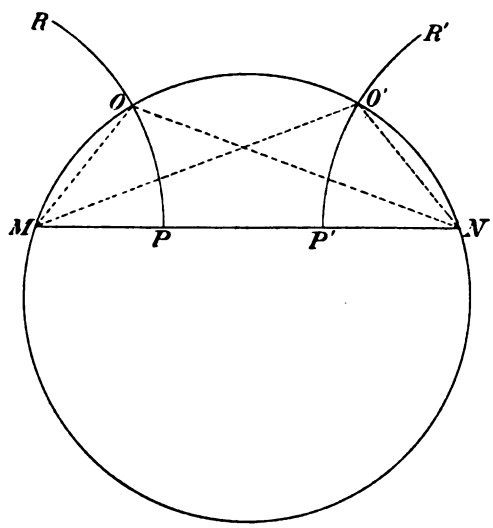
$$\smile C_3C_4 = A_1A_5;$$

$\smile C_3C_4$ ist aber gröfser als A_3A_4; denn:

$$\frac{\sin A_3A_4}{\sin C_3C_4} = \frac{r \cdot \varrho}{r_3 \cdot r_4} \quad \text{(III, 15}^1\text{)};$$

hier ist aber $r \cdot \varrho = r_1 \cdot r_4 < r_3 \cdot r_4$ [vgl. (1)], denn $r_1 < r_3$, also $\smile C_3C_4 > A_3A_4$[213]), womit die Schlufsreihe in Menelaos' Beweis hergestellt ist.

212) Dafs der Beweis graphisch war, sagt Menelaos selbst (siehe Note 211: *„in lineis rectis"*). Ein solcher Beweis kann auf vielfache Art geführt werden. Es handelt sich ja darum, auf der Basis (MN) eines gegebenen Abschnittes (von k^0) zwei in demselben eingeschriebene Dreiecke zu zeichnen, so dafs deren Schenkel proportional sind (Figur 71) im Verhältnisse μ. Der Ort der Dreiecksscheitel wird zwei gleiche Kreise (PR und $P'R'$) [vgl. Apollonios, ed. Heiberg II, p. 181 ff., und oben Seite 104 und Note 174]; die Scheitel müssen also in O oder O' liegen, d. h. die Dreiecke werden kongruent q. e. d. Dieser Beweis gleicht dem unsrigen, nämlich dafs $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin (c \div y)}{\sin (c \div x)}$, für $90^0 > c \gtrless x \gtrless y$, nur von $x = y$ oder $x + y = c$ erfüllt wird. Für $c = 180^0$ wurde der Satz schon oben vorausgesetzt; vgl. Note 206. — Dafs ähnliche Sätze wie der hier referierte in der vorptolemaiischen Trigonometrie öfters vorkommen, zeigt der Umstand, dafs in Menel. III, 7 der Satz: „Wenn $\frac{\text{crd. } 2(k \div x)}{\text{crd. } 2x} = \frac{\text{crd. } 2(k \div y)}{\text{crd. } 2y}$, so wird $x = y$", ohne irgend eine Erörterung als bekannt vorausgesetzt wird.



Figur 71.

213) Dafs Menelaos ohne irgend eine Erklärung voraussetzt, dafs $\smile C_3C_4 > A_3A_4$, kommt wohl daher, dafs diese Thatsache aus den Rektascensionstafeln allgemein bekannt war. In III, 15^2 hat er ja schon den Punkt der Ekliptik (C_2: Figur 69—70) bestimmt, von wo aus die Längendifferenzen gegen die Wenden hin anfangen kleiner als die zugeordneten Rektascensionsdifferenzen zu werden.

Wir haben die Sätze III, 15^{1-4} so genau erörtert, nicht nur, weil wir in deren Beweisen Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene und, wenn wir uns nicht irren, Überreste der ältesten sphärischen Trigonometrie gefunden haben, sondern auch, weil Maurolycus die Beweise des Menelaos weiter entwickelt und zur Berechnung angewandt hat.

Wie Menelaos setzt Maurolycus[214]):

$$\sin 90^0 \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_5 \quad [\text{Menel. III, } 15^{3-4}],$$

folgert daraus $\smile BC_2 + BA_2 = 90^0$ [Menel. III, 15^3], ferner dafs $\smile BC_2 + BA_2$ ein Maximum ist [Menel. III, 15^3], endlich dafs

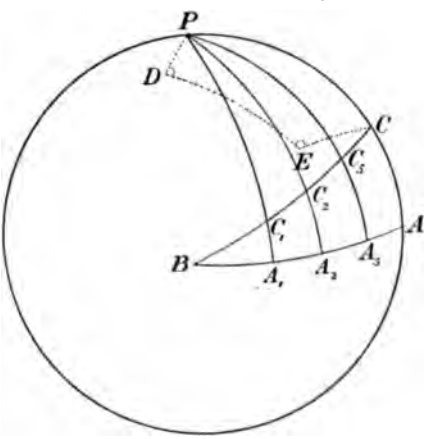
$$\left.\begin{aligned} \smile C_1C_2 &= A_2A_5 \\ \smile C_2C_5 &= A_1A_2 \\ \smile BC_1 &= AA_5 \\ \smile BA_1 &= CC_5 \end{aligned}\right\} \quad [\text{Menel. III, } 15^4],$$

und nun giebt er mit Hülfe von Menelaos III, 2 Berechnungsbeispiele für alle Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, das je nach Bedarf mit einem der Dreiecke BA_1C_1, BA_2C_2 oder BA_5C_5 identifiziert wird.[215])

Ist z. B. BC_1 und BA_1 gegeben, so findet Maurolycus C_1A_1 durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke PCC_1 und PAA_1, was ergiebt:

$$\frac{\sin PC_1}{\sin PA_1} = \frac{\sin C_1C}{\sin A_1A},$$

d. h. $\dfrac{\cos C_1A_1}{\sin 90^0} = \dfrac{\cos BC_1}{\cos BA_1}$ (Grundformel III), wo BC_1 und BA_1 gegeben sind.



Figur 72.

Ganz neu ist wahrscheinlich der Beweis des Maurolycus, dafs

$$\sin B\widehat{C_1}A_1 = \sin \widehat{PC_5},$$

$$\sin B\widehat{C_2}A_2 = \sin \widehat{PC_2}$$

und

$$\sin B\widehat{C_5}A_5 = \sin \widehat{PC_1}.$$

Der Beweis kann durch Menelaos III, 2 geführt werden, denn ziehen wir (Figur 72) mit C_1 als Pol den gröfsten Kreis DE, so bekommen wir:

214) Vgl. Bulletino Boncompagni 9 (1876), p. 71 ff.

215) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 152—153. Dafs v. Braunmühl dem Maurolycus diese Konstruktion zuschreibt, kommt daher, dafs letzterer die Sätze III, 15^{2-4} aus seiner Menelaosausgabe ausgeschlossen hat, um sie in einer verbesserten Gestalt in seine eigene *Sphärik* aufzunehmen; vgl. Seite 20—21 oben.

$$\frac{\sin DE}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin BA_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin PC}{\sin PC_1} = \frac{\sin PC_5}{\sin 90^\circ},$$

d. h.

$$\sin PC_5 = \sin DE = \sin \widehat{BC_1}A_1 \quad \text{q. e. d.}$$

Durch diese Neuerung ist es Maurolycus gelungen, Berechnungen zu erledigen, zu welchen wir die zwei Grundformeln V und VI (vgl. Seite 82) gebrauchen, die wir nicht einmal implicite in Menelaos' und Ptolemaios' Werken gefunden haben.

Maurolycus' Anwendung von Menelaos III, 2 und 15 zeigt uns durchaus, dafs diese Sätze auch von Menelaos zu Berechnungen verwendet werden konnten, statt allein zum Beweis von Ungleichheiten von Bogenverhältnissen. Ob Menelaos sie thatsächlich *ähnlich* wie Maurolycus verwandt hat, das mufs lediglich Vermutung bleiben, so lange die Belege fehlen.

c. Die Erfindung der Trigonometrie.

Um ein Totalbild von der ältesten Geschichte der Trigonometrie zu gewinnen, wollen wir zum Schlufs die zerstreuten Elemente aus den vorhergehenden Untersuchungen sammeln.

Zuerst können wir es als ausgemacht betrachten, dafs sowohl die ebene als die sphärische Trigonometrie schon zur Zeit des Menelaos eine so hohe Entwickelungsstufe erreicht hatte, dafs Ptolemaios kaum etwas Neues hat hinzufügen können.

Es leuchtet ein, dafs Ptolemaios aus den älteren trigonometrischen Werken in seiner *Syntaxis* nur dem für seine Zwecke durchaus Nötigen Platz gegeben und sogar wichtige Sätze wie Menelaos III, 2 und 15[1] ausgeschlossen hat, um seine mathematischen Hülfsmittel so einfach und leicht faſsbar wie möglich zu machen.[216]) Selbst wenn dadurch seine Berechnungen schwerfälliger werden, so läſst sich dieses Verfahren schon verteidigen. Eine Folge dieser Vereinfachung ist indessen, dafs wir von der ältesten Trigonometrie ein verschleiertes, ja teilweise sogar verzerrtes Bild bekommen haben.

Aus den Kenntnissen, die Menelaos aus der Trigonometrie der Ebene voraussetzt, schlieſsen wir mit Sicherheit, dafs die betreffenden Werke, welchen

216) Dafs Ptolemaios das ihm zur Verfügung stehende Material möglichst abkürzte, sagt er selbst in den Einleitungen zur Sehnentafelberechnung und zu den σφαιρικαὶ δείξεις. Da heifst es nämlich (*Syntaxis* I, cap. 10, ed. Heiberg I, p. 31): „πρότερον δὲ δείξομεν, πῶς ἂν ὡς ἔνι μάλιστα δι' ὀλίγων καὶ τῶν αὐτῶν θεωρημάτων εὐμεθόδευτον καὶ ταχείαν τὴν ἐπιβολὴν τὴν πρὸς τὰς πηλικότητας αὐτῶν ποιοίμεθα, ...“ und *Syntaxis* I, cap. 13, ed. Heiberg I, p. 68: „προεκθησόμεθα λημμάτια βραχέα καὶ εὔχρηστα, δι' ὧν τὰς πλείστας σχεδὸν δείξεις τῶν σφαιρικῶς θεωρουμένων, ὡς ἔνι μάλιστα, ἁπλούστερον καὶ μεθοδικώτερον ποιησόμεθα.“

er seine Voraussetzungen entnahm, viel mehr enthielten als die einzelnen Theoreme, die Ptolemaios zur Erklärung seiner Sehnentafelberechnung gerade herausgreift.

Nur zwei von Menelaos' Voraussetzungen ($\sin a = \sin(180^0 - a)$ und $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$) treffen wir in der *Syntaxis*, und zwar in dem Kapitel „*περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν*"; was diese Voraussetzungen betrifft, so nennt Menelaos keine Quelle. Von einer der Voraussetzungen, die sich in der *Syntaxis* nicht finden, sagt Menelaos, dafs sie „*in rectis lineis*" bewiesen wird (vgl. Note 211—212), von anderen, dafs er sie einem seiner eigenen Werke entnommen hat (vgl. Seite 106—107 und 110 ff).

Nun legt Theon dem Menelaos ein Werk von 6, dem Hipparch ein Werk von 12 Büchern „*περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*" bei. Es dürfte sich daraus ergeben, dafs die nämlichen Werke des Menelaos und Hipparch Lehrbücher der Trigonometrie der Ebene waren, denen Menelaos dann seine genannten Voraussetzungen entnommen. Diejenigen dieser Voraussetzungen, von denen Menelaos nicht ausdrücklich sagt, dafs er sie seinem eigenen Werke entnimmt, dürften schon bei Hipparch vorkommen, die anderen dagegen nicht. Jedenfalls verbreiten die in Menelaos' *Sphärik* vorausgesetzten Sätze einiges Licht über den Inhalt der beiden verlorenen Werke.

Ferner, da Menelaos gewisse, offenbar nur trigonometrisch, d. h. annäherungsweise durch Berechnung bestimmbare Gröfsen als „*gegebene*" (*δεδομένα*) bezeichnet (vgl. Seite 119), und da dieselbe Bezeichnung auf genau dieselbe Weise in Ptolemaios' *Analemma* benutzt wird (vgl. Seite 83), und da endlich Marinos dem Ptolemaios eine dem entsprechende Definition vom Wort *δεδομένον* zuschreibt (vgl. Seite 120), so schliefse ich, dafs Menelaos trigonometrische Tafeln besafs, d. h., dafs in seinem Werke „*περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*" ein „*κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*" stand (so lautet nämlich die Überschrift der Sehnentafel im Ptolemaios).

Es ist nun nicht zuviel gewagt, anzunehmen, dafs in Hipparchs Werk mit demselben Titel, das von Theon auf analoge Weise erwähnt wird, auch eine trigonometrische Tafel stand; denn wie man schon längst hervorgehoben hat, lassen sich die Beispiele und Bestimmungen in Hipparchs *Kommentar* zu Aratos' *Phainomena* kaum anders erklären als Ergebnisse trigonometrischer Berechnungen (vgl. Seite 84 ff.). Hinzu kommt ferner, dafs Pappos dem Hipparch eine numerische Lösung ganz ähnlicher Probleme zuschreibt (vgl. Seite 70), und dafs wir nachweisen können, dafs die zu dieser Lösung notwendigen sphärisch-trigonometrischen Sätze schon *vor* Menelaos existierten.

Überblicken wir doch unsere Resultate in Bezug auf die sphärische Trigonometrie genauer.

Aus Menelaos' *Sphärik* konnten wir konstatieren, dafs der Doppel-

verhältnissatz (der Satz von der Erhaltung des anharmonischen Sinusverhältnisses durch Projektion) auf der Kugel von Menelaos als allgemein bekannt vorausgesetzt wurde. Wir haben nachgewiesen, dafs dieser Satz eine direkte Folge vom sogenannten Satz des Menelaos war, oder aber auf ganz ähnliche Weise wie dieser aus der Ebene auf die Kugel übertragbar war. Wir sahen endlich, dafs Menelaos' Satz anders formuliert war als die anderen Sätze der *Sphärik*, und zwar zunächst wie ein zu einem astronomischen Werk gehörender Hülfssatz, ferner, dafs Menelaos die aus der ebenen Geometrie und Trigonometrie zum Beweise dieses Satzes notwendigen Hülfssätze als allgemein bekannt voraussetzt. Diese Hülfssätze knüpft Ptolemaios in seiner *Syntaxis* an die *σφαιρικαὶ δείξεις* und nicht an die Sehnentafelberechnung an.

Die einzige natürliche Erklärung dieser Thatsachen ist die, dafs der Satz des Menelaos sowie der Doppelverhältnissatz, beide auf die Kugel übertragen, in einem älteren astronomischen Werk standen. Es gewinnt somit die Annahme an Wahrscheinlichkeit, dafs sie dem Hipparch bekannt gewesen sind.

Nun wissen wir, dafs die numerischen Beispiele in Hipparchs *Kommentar* sich auf die Auf- und Untergänge der Tierkreisbilder beziehen, ferner, dafs eine genauere Auseinandersetzung dieses Problems, sowie des der Auf- und Niedergänge der Tierkreiszeichen (mit denen die Bilder verglichen werden) sich in seinem Werke „*περὶ συναναιολῶν* etc. *τῶν ἀπλανῶν*" fand. Pappos schreibt ihm die *numerische* Lösung des Obliquascensionsproblems (Aufgang der Tierzeichen) zu. Hipparchs Angabe, dafs er seine Lösung *διὰ τῶν γραμμῶν* erledigt, kann sich, wie wir sahen, auf die *σφαιρικαὶ δείξεις* beziehen, und dem entsprechend werden sämtliche diese Probleme im Ptolemaios mit Hülfe der *σφαιρικαὶ δείξεις* (d. h. der Anwendungen von Menelaos' Satz) und der Sehnentafel gelöst. Ferner sahen wir, dafs Ptolemaios bei der Lösung des einen dieser Probleme (die Berechnung einer Obliquascensionstafel) zwei Methoden giebt, deren eine durch Beispiele erläutert wird, die mit der Tafel nicht übereinstimmen, während die Beispiele der anderen in voller Übereinstimmung mit der Tafel sind. Endlich haben wir in Menelaos III, 15 (vgl. Seite 115, 119 und Note 213) Sätze gefunden, deren Aufstellung sich einerseits erst durch die Kenntnis einer Rektascensionstafel natürlich erklären läfst, und die andererseits der Berechnung einer solchen Tafel dienlich sind.

Alle Anzeichen laufen also dahin zusammen, dafs Hipparch die zur Berechnung notwendigen sphärisch-trigonometrischen Sätze besafs, dafs er eine trigonometrische Lösung des Rektascensions- und des Obliquascensionsproblems gegeben hat, und dafs sein Hülfsmittel dazu eine trigonometrische Tafel war. Es ergiebt sich somit, dafs Hipparchs trigonometrische Kennt-

nisse keineswegs hinter denen des Ptolemaios, wie sie in der *Syntaxis* dargelegt sind, zurückstehen, und dafs die Trigonometrie bei Menelaos schon bedeutend weiter fortgeschritten war.

Bis zu diesem Punkt sind unsere Schlufsfolgerungen sicher und bestätigen durchaus die Ansichten von Delambre und Tannery. Was die noch übrig bleibenden Fragen betrifft, so sind wir auf Vermutungen angewiesen.

Was wir gern wissen möchten, ist dies:

1. Welche trigonometrischen Methoden besafsen die Griechen überhaupt?
2. In welcher chronologischen Reihenfolge wurden diese Methoden entwickelt, und wie wurden sie erfunden?
3. Wem gehören die Erfindungen dieser Methoden, oder, wenn dies nicht zu ermitteln ist, in welche Zeit fallen sie ungefähr?

Wir können deutlich vier von einander mehr oder weniger abhängige Richtungen unterscheiden, die alle auf die annäherungsweise Berechnung abzielen. Wir können auch nachweisen, dafs jede dieser vier Gruppen von Werken vertreten ist, die, insofern sie zu derselben Gruppe gehören, alle denselben Titel führen, nämlich:

1. *Die Trigonometrie der Ebene mit den Sehnentafeln: „περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν“.*

   Hipparch (12 Bücher). — Menelaos (6 Bücher). — Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 10—11. — Theons *Kommentar* (Baselerausgabe p. 39—55).
2. *Die sphärisch-trigonometrischen Hülfssätze: „αἱ σφαιρικαὶ δείξεις“.*

   Hipparch. — Menelaos' *Sphärik* III. — Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13. — Theons *Kommentar* (Baselerausgabe p. 61—70).
3. *Die Sonnenuhrkonstruktionen: „περὶ ἀναλήμματος“.*

   Ptolemaios. — Diodoros.
4. *Die Planisphären:*

   Hipparch (?). — Ptolemaios.

Welche von diesen Methoden ist aber die älteste?

Schon im voraus können wir annehmen, dafs die Trigonometrie der Ebene nicht die älteste gewesen ist, d. h., dafs die Sehnentafeln verhältnismäfsig spät berechnet worden sind. Denn so wie die Griechen nun einmal veranlagt waren, können wir uns kaum denken, dafs solche Tafeln an sich das Ziel gewesen sein könnten. Sie bildeten für die Griechen vielmehr lediglich ein Mittel — ein notwendiges Übel möchten wir fast sagen —, das zu entwickeln man sich nur in Rücksicht auf praktisch astronomische Zwecke veranlafst sah. Die Probleme aber, durch die man zur Tafelberechnung angeregt wurde, müssen wir zunächst in der sphärischen Astronomie suchen; denn in der Ebene wufste man sich schon zu helfen, wie Archi-

medes' Kreismessung und Aristarchs Werk bezeugen, während man auf der Kugel in der That, sobald es sich um Berechnungen handelte, ganz hülflos, und wie Hypsikles (oder besser wie der Urheber der in seinem *ἀναφορικός* angewandten Methode) auf Postulate angewiesen war.

Was die Sonnenuhrkonstruktionen betrifft, so sind wir mit v. Braunmühl geneigt, die dazu angewandte Methode als die älteste zu betrachten, aber nur als eine instrumentale, die dann später durch den Gebrauch der indessen berechneten Sehnentafeln vervollständigt wurde. Die Gründe für diese Ansicht haben wir oben (Seite 85—86) entwickelt.

Die Planisphären zielen wie die Analemmata zunächst auf die Bestimmung der Zeit ab. Wie es Tannery hübsch dargelegt[217]), ist die Entwickelung der planisphärischen Methode ungefähr dieselbe, die wir bei den Analemmata angenommen haben. Es bestand zuerst eine rein instrumentale Methode zur Auffindung der Zeit während der Nacht. Diese primitive Methode wurde dann später mit einer konstruktiven (der stereographischen Projektion) in Verbindung gebracht, blieb aber dennoch immerhin eine instrumentale. Zuletzt endlich wurden dann die Sehnentafeln zur Auflösung der durch die Konstruktion hervorgebrachten ebenen Dreiecke angewandt, wodurch in der That eine Berechnung sphärischer Probleme erreicht wurde. Dieser Schritt ist aber nach Tannery erst von Ptolemaios gethan.

Wegen solcher Erwägungen glauben wir, dafs es die Erfindung der *σφαιρικαὶ δείξεις* war, die eine trigonometrische Tafelberechnung notwendig machte, und dafs die in Bezug auf die zu der sphärischen Astronomie (den *φαινόμενα*) gehörenden Figuren vorgenommenen Vergleichungen zwischen Bogengröfsen und Geraden als die ältesten primitiven trigonometrischen Erscheinungen zu betrachten sind.

Zur Stütze dieser Annahme können wir auch mehrere recht triftige Gründe anführen:

Die uralte sphärische Astronomie, so wie wir sie durch die *φαινόμενα* des Eudoxos, Aratos und Euklid kennen gelernt, konnte auf die Dauer die Bedürfnisse der praktischen Anwendungen nicht befriedigen, aber noch mehr, es gab schon in der *voreuklidischen Sphärik,* d. h. auch in den ältesten *φαινόμενα* ein Problem, das Obliquascensionsproblem, dessen Lösung selbst nach den damaligen primitiven Forderungen nicht geometrisch zu bewältigen war. Dazu war dieses Problem wegen seiner Anwendungen in der Nautik, Astronomie u. s. w. für die Griechen von einer solchen Wichtigkeit, dafs man sich eifrig bemühte, eine Lösung zu finden (das bestätigt Pappos' Bericht, vgl. Seite 70, und Hypsikles' *ἀναφορικός*, vgl. Seite 72 und 76).

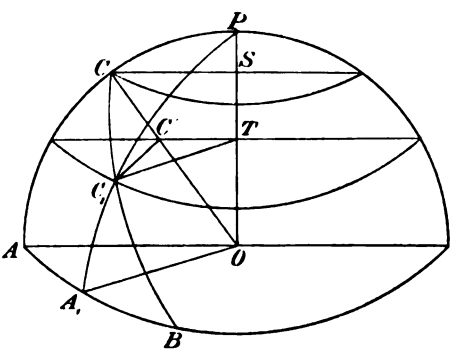
---

217) Tannery, *l'astr. anc.* p. 50—55.

Anfangs hat man natürlich nicht an eine numerische annäherungsweise Lösung gedacht, sondern an eine exakte geometrische. Das Problem war aber, wie oben dargelegt (vgl. Seite 78), nicht in der gewünschten Weise lösbar. Man wurde einfach gezwungen, neue Bahnen einzuschlagen, und fing dann an, die Bogenverhältnisse (zwischen ekliptischen Längen auf der einen, Rektascensionen und Obliquascensionen auf der anderen Seite) mit denen gerader Linien zu vergleichen, und zwar benutzte man dazu das Zunächstliegende, nämlich den Kugel- und die Parallelkreisdurchmesser.

Die Gründe, die uns zu der Annahme geführt haben, dafs die Entwickelung gerade diese gewesen ist, sind erstens die Sätze III, 11—12 im Theodosios (vgl. Seite 79—80), zweitens, dafs die Kenntnis des ersten dieser Sätze wahrscheinlich von Menelaos, aber jedenfalls von den Arabern dem Apollonios zugeschrieben wird (vgl. Seite 117), schliefslich, dafs wir aus den letzten Sätzen (III, 15^{1-4}) in Menelaos' *Sphärik* schliefsen dürfen, dafs die Parallelkreisdurchmesser auch von seinen Vorgängern als primitive trigonometrische Funktion verwendet wurden.

Da es sich nun zeigte, dafs die Herstellung von Ungleichheiten zwischen Bogen- und Durchmesserverhältnissen nicht weiter führte, so begann man bei der anschaulichen Betrachtung der sphärischen Figuren, die sich durch die Probleme selbst darboten, dieselben mit einem Netz von Durchmessern *und Sehnen* zu durchziehen; denn mit den Durchmessern allein kam man natürlich nicht vorwärts.



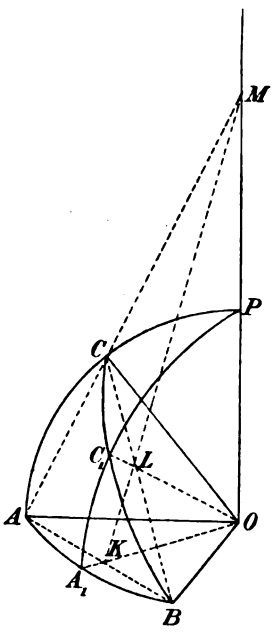
Figur 73.

Die sphärische Figur, die sich in Theodosios III, 11 darbot, war das sphärische Viereck, die Figur von Menelaos' Satz (Meridian-Äquator-Ekliptik-Deklinationskreis), und nun war der Weg zum Beweis von Menelaos' Satz, wenn die analoge Figur und der analoge Satz in der Ebene schon aus den *Porismen* bekannt waren, nicht weit. Figur 73, die Figur von Theodosios III, 11, und 74, die Figur von Menelaos' Satz (zum Vergleich mit Figur 73 spezialisiert) zeigen in der That, wie leicht der Übergang von ersterer zu letzterer gewesen sein mufs.

Es ist jedoch immerhin eine Frage, ob man direkt von Theodosios III, 11 zum Satze des Menelaos gelangt ist. Sowohl v. Braunmühl[218])

218) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 16.

als namentlich Zeuthen[219]) trägt Bedenken, zu glauben, dafs alle Fälle der Auflösung sphärischer Dreiecke durch Spezialisierung eines allgemeinen Theorems erledigt worden sind (wie es in der *Syntaxis* mit Menelaos' Satz der Fall ist), ohne dafs erst die für jeden Einzelfall nötigen Sätze entwickelt waren. Zeuthen[220]) ist deswegen der Ansicht, dafs wenigstens ein Teil der in der *Syntaxis* behandelten Probleme der sphärischen Astronomie auf eine mehr direkte Weise gelöst worden ist, ehe alle die Lösungen auf die Anwendung von Menelaos' Satz zurückgeführt wurden.



Figur 74.

Obwohl man zugeben mufs, dafs Zeuthens Erwägungen schwer wiegen, so kann ich es doch nicht für durchaus undenkbar halten, dafs man in diesem Fall, wo es sich um eine Übertragung eines schon lange wohlbekannten Satzes aus der Ebene handelt, gleich auf eben diesen Satz, der sich als der ergiebigste erwies, gekommen ist.

Wir können uns aber auch vorstellen, dafs man mit der Figur in Theodosios III, 11 (Figur 73) als Ausgangspunkt zuerst auf mehr spezielle Methoden zur Lösung der einfachsten Probleme, d. h. zunächst des Rektascensions- und Deklinationsproblems, gekommen ist.

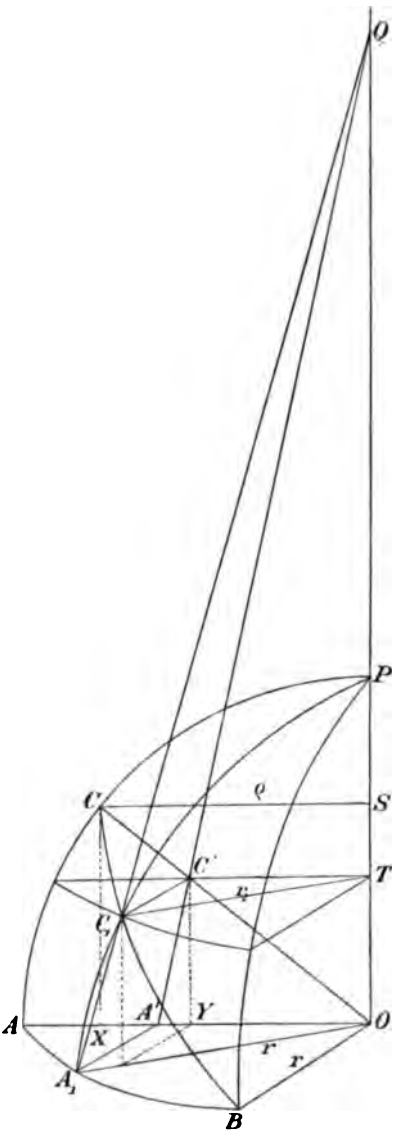
219) Vgl. Zeuthen, Bibl. math. 1900, p. 20.

220) Zeuthen sagt (l. c. p. 20—21): *„selon moi un tel commencement serait même inouï dans l'histoire des mathématiques, où l'on connaît ordinairement les solutions particulières des principales questions resolues plus tard par une méthode générale avant de construire cette méthode. Il est donc à supposer qu'on ait résolu d'une manière plus directe les questions de trigonométrie sphérique dont s'occupe Ptolémée, ou du moins une partie de ces questions, avant d'en réduire toutes les solutions à l'application du théorème de Menelaos.“* — Wenn Zeuthen nun im Folgenden vermutet, dafs Menelaos derjenige ist, der alle Fälle der Auflösung sphärischer Dreiecke auf die Anwendung von Menelaos' Satz zurückführte, so widerlegt unsere Untersuchung von Menelaos' drittem Buch diese Vermutung. Die ganze von Zeuthen angenommene Entwickelung liegt jedenfalls vor Menelaos, wahrscheinlich vor Hipparch. Menelaos baut allerdings seine sphärisch-trigonometrischen Sätze fast ausschliefslich auf dem Satz des Menelaos auf; bei den Berechnungen aber müssen wir zunächst annehmen, dafs er den entgegengesetzten Weg einschlug, und die von ihm selbst erfundenen Sätze statt des Satzes des Menelaos anwandte, sobald dieselben ihm die Berechnung erleichtern konnten (vgl. die Seiten 93, 115—116 und Note 205*). Die allgemeine Zurückführung zum Satze des Menelaos ist dann entweder vor Menelaos erledigt und von Ptolemaios nachgeahmt, oder erst von Ptolemaios unternommen.

Überreste solcher Methoden haben wir allerdings nicht in der *Sphärik* des Menelaos gefunden, die ganz auf dem Satz des Menelaos gebaut ist, und die Erleichterungen in den Berechnungen, die wir dem Menelaos zuzuschreiben geneigt waren (vgl. die Seiten 93, 115—116 und Note 205[a]), gehören ohne Zweifel ihm selbst und beruhen alle auf der Kenntnis des Satzes des Menelaos. Auch nicht die anderen kugelgeometrischen Sätze, deren Kenntnis wir bei den Griechen vor Menelaos voraussetzten, kommen hier in Frage, erstens weil sie nicht zur Berechnung geeignet sind, zweitens weil sie die Übertragung von Menelaos' Satz voraussetzen.

Dagegen kann man, von der Figur in Theodosios III, 11 (Figur 73) ausgehend, ohne viel zu dieser hinzuzufügen, auf sehr einfache Weise zum Beweis von zwei Spezialfällen des allgemeinen Satzes III, 15[1] im Menelaos gelangen, und mit Hülfe dieser Spezialfälle lassen sich mehrere der Probleme in der *Syntaxis* lösen.

Projizieren wir nämlich in Theodosios' Figur (73) die Punkte A_1 und C_1 senkrecht auf die Ebene OAP, so bekommen wir die Punkte A' und C'. Die Geraden A_1C_1 und $A'C'$ treffen sich dann in einem Punkte Q auf der Verlängerung von OP, und wir bekommen (Figur 75):



Figur 75.

1) $$\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{crd}.\,2AA_1}{\frac{1}{2}\,\mathrm{crd}.\,2CC_1} = \frac{A_1A'}{C_1C'} = \frac{A_1Q}{C_1Q} = \frac{A_1O}{C_1T} = \frac{r}{r_1},$$

d. h. $$\frac{\sin AA_1}{\sin CC_1} = \frac{r}{r_1}. \qquad (1)$$

2) $$\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{crd}.\,2A_1B}{\frac{1}{2}\,\mathrm{crd}.\,2C_1B} = \frac{OA'}{OC'} = \frac{OA'}{C'T}\cdot\frac{C'T}{OC'} = \frac{OA_1}{C_1T}\cdot\frac{CS}{CO} = \frac{r}{r_1}\cdot\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho}{r_1},$$

d. h. $$\frac{\sin A_1B}{\sin C_1B} = \frac{\varrho}{r_1} \qquad (2)$$

(1) und (2) bilden offenbar zwei Spezialfälle von Menelaos III, 15^1 (vgl. Seite 114—115), welcher Satz sagt:

$$\frac{\sin A_1 A_2}{\sin C_1 C_2} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_2}.$$

Implicite stehen die Gleichungen (1) und (2) in Menelaos' *Sphärik*, wo sie gefunden worden sind (Fig. 75) durch Anwendung von III, 2 bezw. auf die Dreiecke PCC_1 und PAA_1 und auf BC_1A_1 und PC_1C.[221])

Wenn die Deklinationen der Ekliptikpunkte bestimmt sind, giebt (1) die Rektascensionen derselben. Für den Punkt C_1 der Ekliptik (BC) mit der Länge BC_1 $(= \lambda)$ und der Deklination C_1A_1 $(= \delta)$ giebt (1) nämlich zur Bestimmung der Rektascensionen BA_1 $(= \alpha)$:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos \delta}, \qquad \text{(Grundformel III)}$$

welche Gleichung ebenso brauchbar ist wie die von Ptolemaios benutzte[222]):

$$\frac{\sin (90^\circ \dotplus \varepsilon)}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin (90^\circ \dotplus \delta)}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ}, \qquad \text{(Grundformel II)}$$

wo ε die Neigung der Ekliptik ist.

(2) giebt $\frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda}$ und ist also weniger brauchbar.

Um durch Figur 75 die Deklinationen zu bekommen, müssen wir die Punkte C und C' senkrecht auf AO projizieren; dadurch erhalten wir die Punkte X und Y, und die ähnlichen Dreiecke OCX und $OC'Y$ geben dann:

$$\frac{C'Y}{CX} = \frac{C'O}{CO},$$

d. h.

$$\frac{\frac{1}{2} \text{crd. } 2C_1A_1}{\frac{1}{2} \text{crd. } 2CA} = \frac{\frac{1}{2} \text{crd. } C_1B}{r},$$

also:

$$\frac{\sin C_1A_1}{\sin CA} = \frac{\sin C_1B}{r}. \qquad (3)$$

In diesem Falle giebt (3) zur Berechnung von δ:

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda}{1}.$$

Es ist dies die Grundformel I für Dreieck AC_1A_1; dieselbe findet sich

---

221) (1) finden wir in III, 15^2 (vgl. Gleichung (2) Seite 118), (2) in III, 15^1 (vgl. Gleichung (2) Seite 115). — (1) kommt der Grundformel III: $\cos a = \cos c \cos b$ (vgl. Seite 82) gleich und zwar für Dreieck BA_1C_1 (vgl. Note 205^a). — (2) kommt der Formel des Ibn-Junos: $\frac{\cos B}{\cos b} = \frac{\sin c}{\sin a}$ gleich (vgl. Seite 118).

222) Vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* I, cap. 16, ed. Heiberg I, p. 82—83.

implicite im Menelaos III, 12 (vgl. Seite 108 und Note 185[a]), wo sie durch III, 2 bewiesen wird. Ptolemaios[223]) erhält durch Menelaos' Satz:

$$\frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90^0}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin 90^0}.$$

Diese Erörterung zeigt, wie man durch die an Theodosios III, 11 sich eng anschliefsende Figur 75 eine Berechnung der Sonnendeklinationen und Sonnenrektascensionen und einer Deklinations- und Rektascensionstafel, wie die in der *Syntaxis*, leicht erledigen kann. Die Obliquascensionen dagegen, deren Berechnung auf Grundformel II (vgl. Seite 73 und 82), d. h. $\operatorname{tg} c = \sin b \cdot \operatorname{tg} C$, beruht, ergeben sich schwerlich durch Figur 75.

Methoden wie die hier in Bezug auf Figur 75 dargelegten können wir bei den Griechen vor Hipparch oder möglicherweise noch bei Hipparch selbst voraussetzen. Sie würden mit den Ergebnissen unserer Untersuchungen von Theodosios' und Menelaos' *Sphärica* übereinstimmen, denn sie schliefsen sich eng an die Figur im Theodosios an und kommen in einer allgemeinen Gestalt im Menelaos vor. Aufserdem bildet Figur 75 ein natürliches Zwischenglied zwischen 73 und 74, d. h. zwischen dem dem Apollonios zugeschriebenen Satz und dem Satz des Menelaos.

Wirkliche Spuren solcher Zwischenglieder haben wir aber durchaus nicht gefunden; wir können deswegen nur sagen: Wenn die Griechen nicht direkt auf Menelaos' Satz gekommen sind und denselben nicht gleich vom Anfang ab benutzt haben, so können wir uns wohl denken, dafs die vor der Übertragung dieses Satzes angewandten Methoden der oben erwähnten Art gewesen sind.

Nur die Frage ist noch übrig, *wann* die verschiedenen Fortschritte in der Erfindung und Entwickelung der ältesten Trigonometrie geschehen sind, und wem wir sie zuschreiben können.

Mit Sicherheit läfst sich nur eine obere und untere Grenze feststellen:

Zur Zeit des Aristarch von Samos (c. 275 v. Chr.) existierte keine berechnende Trigonometrie, zur Zeit des Hipparch (c. 150 v. Chr.) waren aller Wahrscheinlichkeit nach sämtliche in Ptolemaios' *Syntaxis* gebrauchte Methoden vollkommen entwickelt.

Zur Zeit des Menelaos endlich erreichte die Trigonometrie sicherlich die höchste Entwickelungsstufe, zu der sie sich überhaupt bei den Griechen emporschwang; denn aus unserer Untersuchung geht es deutlich hervor, dafs Menelaos zuerst die Definition des sphärischen Dreiecks aufstellte, und dafs die Sätze III, 2—10 seiner *Sphärik*, die eben auf dieser Neuerung beruhen, von ihm selbst erfunden sind.[224])

223) Vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* I, cap. 14, ed. Heiberg I, p. 76—77.

224) Auch die Sätze III, 11—14 gehören wohl hauptsächlich dem Menelaos

Wieviel von der Trigonometrie schon vor Hipparch erfunden war, ist dagegen nicht leicht zu entscheiden.

Dafs Hipparch die Trigonometrie ohne Vorgänger erfand und so weit entwickelte, darf man kaum annehmen. Wir haben aber nur eine einzige Nachricht gefunden, die uns auf die Zeit vor Hipparch hinweist, und zwar eine, deren Authentizität nicht festgestellt und deren Bedeutung nicht leicht zu beurteilen ist.

Diese Nachricht redet von Apollonios (c. 250—200 v. Chr.) und bezieht sich offenbar auf das Obliquascensions- und Rektascensionsproblem. Wir vermuten deswegen auch, dafs Apollonios in der That die ersten Schritte zur berechnenden sphärischen Geometrie gethan. Was er in dieser Beziehung geleistet hat, kann viel, aber auch sehr wenig sein. Wir wissen es nicht und stofsen aufserdem auf Schwierigkeiten, in dieser Frage irgend etwas zu entscheiden. Die Übertragung der Sätze aus den *Porismen* auf die Kugel sind wir ja zunächst geneigt, bei einem grofsen Geometer wie dem Apollonios zu suchen, um so mehr, weil derselbe eben mit den betreffenden Sätzen durchaus vertraut war, was seine Kegelschnittlehre beweist. Die eigentliche Berechnung von Sehnentafeln dagegen können wir zunächst von einem ausschliefslich praktischen Astronomen wie Hipparch erwarten, und infolge Theons Bericht sind wir in der That berechtigt zu glauben, dafs Hipparchs Tafel die erste war.

Die Annahme aber, dafs Apollonios die geometrischen Hülfsmittel, Hipparch die praktischen entwickelt habe, führt uns zur Konsequenz, dafs Menelaos' Satz bis auf Menelaos, ganz wie später von Ptolemaios ab bis zu den Indern und Arabern, das einzige sphärisch-trigonometrische Mittel zur Auflösung sphärischer Dreiecke gewesen ist. Nach dem überlieferten Material ist dies allerdings das zunächst Wahrscheinliche, nach den natürlichen Regeln für die Entwickelung der Mathematik dagegen nicht. Wir geraten deswegen in ein Dilemma, zu dessen Lösung uns die notwendigen Kriterien nicht zur Verfügung stehen.

Müssen wir aber darauf verzichten, die frühesten Vorgänge bei der Erfindung der Trigonometrie klar zu legen, so können wir uns damit trösten, dafs mit Hülfe von Menelaos' *Sphärik* wenigstens ziemlich genau festzustellen ist, wie in grofsen Zügen der Gang der Entwickelung gewesen ist, durch welche Probleme die antreibenden Kräfte erzeugt wurden, wie richtig die Vermutungen, die man in Bezug auf Hipparchs Thätigkeit gehabt hat,

selbst; denn sie setzen ja die Sätze aus seinem eigenen Werk über die ebene Trigonometrie voraus. — III, 15 [2–4] schreibt Menelaos ganz deutlich sich selbst zu. Von Menelaos' drittem Buch dürften also nur III, 1 (Menelaos' Satz) und möglicherweise III, 15[1] seinen Vorgängern bekannt gewesen sein.

gewesen sind, und endlich, wieviel Verdienste sich Menelaos um die sphärische Trigonometrie erworben hat.

Er ist insofern der eigentliche Urheber der sphärischen Trigonometrie geworden, als es ihm mit der Definition des sphärischen Dreiecks sogleich auch gelang, die ersten primitiven Elemente der sphärisch-trigonometrischen Dreieckslehre zu erschaffen. Wahrscheinlich hat er damit auch für die Berechnungen Erleichterungen eingeführt, die jedoch nicht die erwünschten Früchte trugen, weil die Nachfolger und in erster Linie Ptolemaios nicht die Fähigkeit hatten, seine Methoden weiter zu entwickeln. Seine sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze aber, die glücklicherweise nicht von den Ptolemaiischen Kompilationsarbeiten unterdrückt wurden, gingen in die Hände der Araber über, die die eigentlichen Erben des in der Geschichte der griechischen Geometrie ziemlich allein dastehenden Menelaos wurden.

Tafel über den Inhalt der alten Sphärik.

Theodosios' Sphärik:	Gebraucht von demselben Werk die Sätze: Buch, Satz	Wird als Voraussetzung*) zitiert oder gebraucht in Autolykos' *περὶ κινουμένης σφαίρας*: Satz, Seite	Autolykos' *περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων*: Buch, Satz, Seite	Euklids *φαινόμενα*: (ed. Gregory) Satz, Seite, Zeile
I, Defin. 1	—	1, 2	—	—
2	—	12, 44	—	—
3	—	1, 2	—	—
4	—	1, 2	—	—
5	—	1, 2	—	—
6	—	7, 22	—	—
I, Satz 1	—	1, 4—6	—	Einl. **561,32**
2	I, 1, Corollar 2	—	—	—
3	I, 1, 2	—	—	—
4	—	—	—	—
5	I, 4	—	—	—
6[a]	I, 1, Coroll. 2	12, 46	—	—
6[b]	—	—	—	—
7	—	**12, 46**	—	—
8	—	**1, 4**	—	—
9	I, Defin. 5	(1, 2)	—	—
10	I, 2, Coroll.	—	—	—
11	I, 6[b]	2, 8	I, 10, 86—88	6, 569, 15
12	I, 6[a]	(12, 44?)	—	Einl., **562,16**
13	I, 8	—	—	**2, 565, 8**
14	I, 8	—	—	—
15	I, 10, 13	**5, 16; 6, 20**	—	**2, 564, 30**
16	—	—	—	—
17	I, Def. 5, Satz 15	—	—	—
18	—	—	—	—
19	I, 18	—	—	—
20	I, 17	6, 18; 10, 36	—	—
21	I, 13, 14, 15, 20	—	—	—
22	—	—	—	—
23	—	—	—	—
II, Defin.	—	6, 16	—	—
II, Satz 1	I, 8	—	—	Einl., 557, 19 „ 561, 30
2	I, 10	**1, 6**	—	—
3	I, 15; II, Def.	6, 20	—	
4	II, 2, 3.	—	—	
5	I, 11; II, 4	10, 36	—	**2, 564, 21**
II, Satz 6	I, 20, 21; II, 2, 3, 5	—	—	—
7	II, 2, 6	—	—	—
8	II, 2, 3, 6	6, 16	—	Einl., 561, 31
9	I, 15	—	(I, 10, 86—88)	**2, 564, 5**
10	I, Def. 5, Satz 15	**2, 8**	—	—
11	—	—	—	—
12	—	—	—	—
13	I, Def. 5, Satz 15; II, 2, 3, 5	**8, 30**	—	4, 567, 19 14, 586, 12
14	I, 17	—	—	—
15	I, 17; II, 3, 12	—	I, 9, 82	**4, 567, 22**
16	II, 8, 10, 13	—	—	—
17	I, 15, 21; II, 9, 12	—	—	8, 572—573 Cod. Vind. Satz 12.
18	II, 17	—	—	**8, 573, 2**
19	I, 15; II, 17, 18	—	—	**6, 569, 32****)
20	II, 10 oder 19	9, 34	—	9, 574, 1
21	I, Def. 6, Satz 15	—	—	—
22	I, 15; II, 5, 9, 12, 21	—	—	**7, 571—572**
23	I, 15; II, 5, 9, 12, 22	—	—	—
III, Satz 1	—	**7, 24**	—	—
2	—	—	—	14, 585, 41
3	I, 15	(10, 38)	—	Cod. Vind. Satz 12
4	I, 15	—	—	—
5	II, 10; III, 1, 4	—	—	—
6	I, 6a, 15; II, 10; III, 1, 3	—	—	—
7	I, 15; II, 13; III, 1, 4	—	—	**8, 572, 30**
8	I, 6a, 15; II, 13; III, 2, 3, 7	—	—	Cod. Vind. Satz 12
9	III, 6	—	—	—
10	III, 6	—	—	—
11	I, 10, 15	—	—	—
12	II, 10, 13, 15; III, 10	—	—	—
13	II, 10 oder 13, 17, 18; III, 3	—	—	—
14	II, 13	—	—	—

*) Nur die Stellen aus Autolykos und Euklid, die notwendig sind um die Sachlage klar zu legen, sind hier mitgenommen. **) Nur der letzte Teil von Theod. II, 19 wird hier vorausgesetzt. **Anm.** Was die in dieser Tafel angeführten Stellen aus Autolykos, sowie die in Kolonne 2 aufgeführten Sätze des Theodosios betrifft, so müssen wir den Vorbehalt nehmen, daſs Neuausgaben der betreffenden Werke natürlich die Resultate ändern können; so meint z. B. Tannery (vgl. *Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, X, I, pag. 195 ff.*), daſs gröſsere Teile von Autolykos' Werken unecht sind.

Nachtrag.

1.

Über die lateinischen Menelaoshandschriften (vgl. Seite 11—12).

In Italien habe ich nachträglich Gelegenheit gehabt, die Seite 12 genannten unter den Nummern 6—9 und 13—15 aufgeführten Handschriften zu untersuchen oder wenigstens einzusehen; aufserdem fand ich in der Vatikanischen Bibliothek noch eine Menelaoshandschrift, nämlich den Cod. Vatic. lat. 3380. Mit dem so gesammelten Material bin ich im Stande, eine vorläufige Klassifizierung der bis jetzt untersuchten Hss. zu unternehmen. Es ergiebt sich, dafs die lateinischen Menelaoshss. sich in zwei Klassen teilen, von denen erstere (nennen wir sie A) die reine Übersetzung von Gerhard von Cremona, letztere (B) dieselbe mit einem Kommentar des 13. Jahrh. enthält, dessen Urheber der bekannte Euklidkommentator Johannes Campanus von Novara ist.

A.

Es gehören zu dieser Klasse folgende Handschriften:

1.

Cod. Parisinus lat. 9335, membr. XIV saec.

Eine Beschreibung und ein Inhaltsverzeichnis dieser berühmten Hs. gab ich in der Bibl. math. 1901, p. 63—75. In Anschlufs an diese Beschreibung kann ich Folgendes mitteilen:

Fol. 134^r ist »Johannem Fontana« (nicht Pontana) zu lesen. Es geht dies aus dem Cod. Barberinus lat. X, 168 hervor. Diese Hs. besteht aus mehreren Heften aus dem 14. und dem Anfang des 15. Jahrh. teils von Pergament und teils von Papier. Über einem anonymen, scheinbar astronomischen Text, welcher in einem Pergamentheft dieser Hs. enthalten ist, und der im 14. Jahrh. geschrieben ist, hat eine dem Anfang des 15. angehörige Hand folgende Worte notiert: *Libellus de speculo mukesi magistri Johannis Fontana Venetiis No. VIIII.* Diese Überschrift gehört kaum zu dem Texte, über dem sie angebracht ist; vielmehr gehört sie zu einem weggefallenen Heft; denn es sind ganz deutlich mehrere Hefte aus dem Einband herausgefallen, und die Numerierung der Hefte ist ganz offenbar unkorrekt. Die Überschrift stimmt aber mit dem überein, was wir aus der Subskription im Pariser Codex schliefsen dürfen, nämlich dafs ein Johannes Fontana aus Venedig in der ersten Hälfte des 15. Jahrh. mit Untersuchungen über den Brennspiegel beschäftigt war. Weitere Aufschlüsse über die Person dieses Fontana, der mit dem um das Jahr 1600 lebenden nicht zu verwechseln ist, habe ich nicht finden können.

Der Anhang zum Menelaostexte fol. 54^v—55^r: *Volo ostendere, quod omnium trium linearum* ..., welcher auch im Cod. Arsenalis 1035, fol. 104

und im Cod. Reginensis 1268, fol. 238 (vgl. unten) als Anhang zum Menelaostexte vorkommt, findet sich als selbständiger Text mit der Überschrift: *Propositiones de proportione* im Cod. S. Marco Venet. 332 (*Valentinelli* XI, 6) fol. 292^{v}—293^{v}, XIII saec. — Dieser Text besteht aus nichts anderem als den letzten Sätzen (Buch 4, Satz 26—28) aus Jordanus Nemorarius' *de triangulis*.

2.

Cod. Parisinus Arsenalis lat. 1035, membr. XV saec.

Was den Inhalt dieser Hs., deren Menelaostext (fol. 81^{r}—104^{r}) aus dem vorigen Codex abgeschrieben ist, betrifft, genügen die Angaben in Martins Katalog (vgl. Seite 11, Note 40).

3.

Cod. Reginensis lat. 1268, membr. XIV saec. 25,6 × 18,5 cm.

Dieser Codex besteht aus einem leeren Vorsatzblatt und 238 numerierten Folien. Die Schriftfläche (keine Kolumnen) sowie die Zeilenzahl (35—50) variiert. Die Schrift, von mehreren Händen derselben Zeit, weist auf das zweite Drittel des 14. Jahrh. hin. Datierung, Subskriptionen oder Inhaltsverzeichnis sind nicht aufzufinden. Textkorrekturen von der ersten oder von einer zweiten gleichzeitigen Hand kommen öfters vor. Randnoten von einer dem Schlufs des 14. oder Anfang des 15. Jahrh. angehörigen Hand finden sich namentlich im Anaritiustexte.[1]) Initialen, die nur im letzten Drittel der Hs. ausgeführt sind, sowie die mathematischen Figuren (teilweise mit roter und blauer Tinte) sind mittelmäfsiger Arbeit.

Eine Untersuchung der Quaternionen zeigt, dafs der Codex aus 5 ursprünglich von einander getrennten Teilen bestand.[2]) Der Inhalt ist folgender:

Erster Teil, fol. 1—71, besteht aus 9 Quaternionen aus je 4 Lagen. In der letzten Quaternion ist das letzte Blatt, welches wahrscheinlich unbeschrieben war, weggeschnitten.

1. Euklids *Elemente* I—XV (fol. 1^{r}—69^{r}).

Überschrift: fehlt.[3])

Anfang: *Punctus est cui non est pars. — Linea est longitudo sine latitudine . . .*

Schlufs (Buch XV, Satz 6): . . . *constabit quia equidistat substrato, qui totus est in una superficie. Idem intelligatur de aliis.*

Anhang: Euklidscholien[4]) (fol. 69^{r}—71^{r}): *Communis et consuetus rerum cursus utriusque ordinis naturalis raro . . . ordinato numero per*

1) Überschriften von einer viel späteren Zeit, die an mehreren Stellen vorkommen, erwähne ich nur, wenn sie von wirklichem Wert sind.

2) Es ist notwendig, diese 5 Teile, die scheinbar in einander übergehen, auseinander zu halten, wenn man mit Hilfe dieser Hs. die Überlieferungsgeschichte von Euklids *Elementen* untersuchen will.

3) Man bemerke jedoch die Schlufsworte des 9. Buches: *perfectus est liber arismetice Euclidis. Explicuit VIIII^{us}.* — Diese Übersetzung stimmt zunächst mit der von Atelhart von Bath in den Codd. Ampl. Q. 23 und 352 überein; sie liegt jedoch der Campanischen Rezension näher als die in den Erfurter Hss.; die Beweise bestehen lediglich in kurzen Résumés.

4) Diese Scholien haben keine Figuren; sie gehören zu den arithmetischen Büchern.

differentias suas a prima inchoabimus, que est mutatum in qua si fuerit numerus inpar quantum (?) *totus est inpar.*

Fol. 71^{v} ist leer.

Zweiter Teil, fol. 72—91, besteht aus 3 Quaternionen, von denen die zwei ersten 4, die letzte nur 2 Lagen enthält.

2. Euklids *Elemente V—VI mit Kommentar*[1]) (fol. 72^{r}—91^{v}).

Überschrift (der Seite 72^{r}): *Incipit quintus liber.*

Anfang (Einleitung des Kommentators): *Executus Euclidis in superiribus libris quasdam linearum et angularium circulariumque figurarum naturas; de angulis etiam pleraque interserens ad eorundem proprietates pertractandas paulatim ascendendo competenter accedit . . .*

fol. 81^{v}: Überschrift (der Seite): *Incipit sextus liber.*

Text: *Mensurarum alie sunt in actu alie sine intellectu; mensurarum vero, que sunt in actu, tria genera sunt, scilicet altimetria, planimetria et cosmimetria; cuius generis sunt ille, quibus agrimensores et architecti utuntur . . .*

Schlufs: *. . . etiam angulus ā ad angulum d accedit. Manifestum est ergo, quoniam* (sic!) *in circulis equalibus qua proportione arcus iungantur, eadem omnes eorum angulos referri. Quod presens signat descriptio.*

Dritter Teil, fol. 92—143, besteht aus 7 Quaternionen, von denen die 6 ersten 4, die letzte nur 2 Lagen enthält.

3. Euklids *Elemente* X—XV (fol. 92^{r}—142^{v}).[2])

---

1) Dieser Euklidtext und der dazu gehörige Kommentar sind meines Wissens weder ediert noch genau untersucht. Jedes der zwei Bücher (V und VI) wird mit einem Kommentar eingeleitet, welcher bezw. die Seiten fol. 72^{r}—76^{r} und fol. 81^{v}—82^{r} einnimmt. Nach dieser Einleitung folgen Übersetzungen von den *Elementen* mit am Rande aufgezählten Sätzen, im 5. Buch 25 (wie allgemein), im 6. Buch 33, wie in dem griechischen Text, gegen 32 bei Atelhart und Campanus. Zitiert werden in den Einleitungen Alfarabius, Aristoteles, Peripatheticus (sic!). Dafs die Einleitungen in letzter Instanz aus einer griechischen Quelle herrühren, beweist z. B. folgender Passus, den ich als charakteristisch herausgegriffen habe: *Magnum itaque huius in diffinitionis notitia fructum pollicetur; tamen predictarum in medio ponit primordia mensurarum. In ea siquidem tondit Euclides intellectualium, actualium, logicarum, alogarum, dimensionum species, quam plures, quales sunt apodictice omnes nec non ergastice. Inueniuntur enim in hoc sexto libro septem ergasticarum genera figurarum, que sunt sisticum, idmeniaticum* (?), *anagrafum, engrafum, perigrafum, perebolum, proseureticum, quorum omnium locis propriis, quemadmodum ab Euclide disposita sunt, ethymologiam descriptionemque annotabimus.*

2) Es liegt hier nicht ein Kommentar vor, was man nach der von einer ganz jungen Hand hinzugefügten Überschrift annehmen müfste. Wir haben vielmehr mit einer Übersetzung zu thun, die weder mit der von Campanus kommentierten, noch mit der voranstehenden (von Atelhart?) übereinstimmt. Die Propositionen weichen in dem Wortlaut mitunter von den zwei anderen Übersetzungen nicht wenig ab; die Beweise haben nicht die Form eines Résumés, fallen aber keineswegs mit denen in der von Campanus edierten Übersetzung zusammen. Die Satzanzahl der Bücher X—XIV ist bezw. 105 (+ 2 Extrasätze), 41, 15, 18, 10. Buch XV hat nur 5 aufgezählte Sätze. Da die Verdrehung Assicolaus (statt Hypsikles) bezeugt, dafs diese Übersetzung vom Arabischen herrührt, so haben wir in der That hier zwei von einander und von der Campanischen abweichende Rezensionen, die beide vom Arabischen herkommen. Ich vermute deswegen, dafs eine genaue Untersuchung des Cod. Reginensis 1268 über die noch offene Frage von Atelharts und Gerhard v. Cremonas Euklidübersetzungen Licht verbreiten würde. Terminologie und Sprache der gegenwärtigen Übersetzung der Bücher X—XV erinnern vielfach an Gerhard v. Cremona.

Anfang: *Qvantitates, siue sunt linee siue superficies siue corpora, quibus fuerit una quantitas communis eas numerans omnes, dicentur communicantes . . .*

fol. 112^{v} (Schluſs des X. Buches): . . . *sub alterius termino possibile est incidere. Eadem quoque ratio, cum multe sunt inrationales linee, per infinita licet, ad eundem finem perducit.*

fol. 113^{r} (Anfang des XI. Buches): *Corpus est, quod longitudinem et latitudinem habet et altitudinem habet, cuius termini superficies . . .*

fol. 121^{v}: . . . *ergo duo serratilia* $\overline{abgdez}$ *et* $\overline{htklmn}$ *sunt equalia, verum illud e. q. d. v. Libri elementorum Euclidis pars XI explicit.*

fol. 122^{r}: *Incipit pars eiusdem duodecima. Omnium duarum superficierum poligoniarium similium in duobus circulis existentium unius ad alteram proportio est sicut . . .*

fol. 128^{v}: . . . *est proportio* $\overline{bd}$ *ad* $\overline{zt}$ *triplicata, verum illud e. q. d. v. Expleta est XII libri Euclidis.*

Incipit pars eiusdem tercia decima. Sic linea diuidatur secundum proportionem habentem medium et extrema et maiori eius sectioni in longitudine addatur . . .

fol. 135^{r}: . . . *quod latus habentis XX bases est longius latere habentis duodecim bases, quod illud e. q. d. v. Pars tertia decima libri Euclidis expleta est.*

Pars quartadecima, quam edidit Assicolaus, que convenit libro Evclidis. Cum Thesilides[1] *Sirus perrexisset Alexandriam, inuenit ibi patrem meum, aput quem per maiorem partem temporis, quo ibi moratus est, mansit . . .*

fol. 141^{r}: . . . *linea igitur* $\overline{ag}$ *est latus decagoni eiusdem circuli, verum et hoc est q. d. v.*

Incipit pars quinta X ab Assicolao edita libro Evclidis utilis. Intra datum cubum corpus quatuor bases triangulas equales et equilateras habens signare . . .

fol. 142^{v} (Schluſs:) . . . *erit habens XII bases pentagonales equilateras equalium angulorum, quod illud est q. d. v. Expletus est liber Evclidis simul cum duabus partibus ab Assicolao editis, cuius partes sunt quindecim.*

Anhang: Euklidscholien (fol. 142^{v}—143^{v}).

a) *In capitulis, que transtulit Isaac, hoc quod consequitur inuenitur post figuram uicesimam primam libri Euclidis, in qua ponuntur latera quinque figurarum et proportiones earum; reperi hec: Dico, quod non est figura corporea continens superficies equilateras et ortogonas ad inuicem preter eas, quas nominaui. Probatio eius . . .* (1 Seite)

b) *Quidam, qui uocabatur Iohannes, hoc quod sequitur, inuenit: Dico, quod non contingit, ut spera figura corporea continens superficies equalium angulorum et laterum describatur praeter has quinque . . .* (21 Zeilen)

c) *In fine cuiusdam libri fuit repertum hoc, scilicet quod he quinque corporea quatuor elementis referuntur equalibus . . .* (6 Zeilen)

d) *Quod in tercia X figura XII partis probetur, quod* $\overline{zt}$ *sit equi-*

---

1) Man vergleiche diese Vorrede des Hypsikles mit dem Urtext, Euclidis *Elementa*, ed. Heiberg V, 4 ff. — Diese Vorrede fehlt sonst immer in den vom Arabischen geflossenen Euklidübersetzungen.

distans $\overline{ek}$, aliter quam ibi continetur hic demonstratur, hoc modo scilicet: Quoniam . . . (18 Zeilen)

e) *Continet totus iste liber CCCLXV proposita et propositiones et XI corrollaria preter auxiomata singulis libris premissa, proposita autem inf* * * (?), *propositiones uero indicantis explicans* (sic!).

f) *A dato puncto in quolibet laterum assignati trigoni lineam in oppositum latus ducere, que assignatum trigonum in duo equalia seccet. Verbi gratia. Esto . . .* ($^1/_2$ Seite)

Vierter Teil, fol. 144—211, besteht aus 9 Quaternionen aus je 4 Lagen. Die 4 hinteren Blätter der letzten Quaternion sind nach der Einbindung weggeschnitten worden.

4. Al-Narizis *Kommentar zu* Euklids *Elementen I—X* (fol. 144^r—207^v).

Überschrift: fehlt.[1])

Anfang: *Dixit Euclides: Punctum est quod partem non habet. Supra hoc Sambelichius . . .*

Schlufs: . . . *sed ipse est equalis numeris istis, ergo ipse est perfectus et illud.*

5. Scholien zu Werken, die der Sphärik und Trigonometrie angehören (fol. 207^v—211^v):

a) Scholien zu Theodosios' *Sphärik.*

Anfang: *Hee probationes sunt necessarie in theoremate vndecimo secundi libri Theodosii de speris . . .*

b) Scholien, die durch folgende Worte charakterisiert werden (fol. 208^v)[2]): *iste probationes sunt necessarie in ultimo theoremate libri 30 figurarum . . .*

c) Scholien zu Gebers *Astronomie* (?) (210^r,5—211^v,4).

Anfang: *Nota in figura tercia decima primi libri Geber . . .*

d) Scholion zu einem Werke über die *figura sectoris* (211^v,5—21)[3]).

Anfang: *Illud autem punctum orbis signorum, apud quod est maior diuersitas, inuenitur sic . . .*

Schlufs: . . . *hec probatio est necessaria in figura sectoris.*

---

1) Überschrift mit Al-Narizis Namen findet sich nur über Buch 3: *Expositio secundum Anarissi prologi tertie partis Euclidis.* — Die Anordnung der Textteile ist eine andere als in dem von Curtze zu seiner Ausgabe (Leipzig 1899) benutzten Cod. Cracov. 569. Im Cod. Regin. 1268 kommt nämlich zuerst Curtze, p. 1—199, dann p. 204, 15—207, 20, ferner p. 211—386 (statt 386, 16 hat Cod. Reg. 1268 die Worte: *Expletus est liber);* zuletzt folgen endlich die p. 200—204, 14 und p. 207, 21—210 entsprechenden Textteile. Die Stelle, wo der wahrscheinlich unechte Teil des Textes (siehe Curtzes Ausgabe p. 252 und Bibl. math. 1901, p. 365 und 1902, p. 71—72) anfängt, ist im Cod. Regin. 1268 nicht besonders hervorgehoben.

2) Die unter b—d aufgeführten Scholien beziehen sich alle auf das, was wir die *Trigonometrie des Gegebenen* nennen möchten, d. h. auf solche trigonometrische Bestimmungen, wo nur die Möglichkeit einer Berechnung angegeben wird. Diese Art und Weise, unsere Formeln da zu ersetzen, wo eine Ausrechnung nicht erheischt war, die schon im Menelaos angewandt wurde (vgl. Seite 83, 119—120 und 125), hat auch in späteren Zeiten eine grofse Rolle gespielt und läfst sich bis auf Johs. Werner nachweisen.

3) Dieses Scholion bezieht sich auf das in Menelaos III, 15[3] erörterte Problem (vgl. Seite 119).

Fünfter Teil, fol. 212—238, besteht aus 3 Quaternionen aus je 8 und 1 aus 3 Lagen. Die 3 hinteren, wahrscheinlich leeren Blätter der letzten Quaternion sind nach der Einbindung weggeschnitten worden.

6. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 212^{r}—238^{r}).

Überschrift (der Seite): *Liber Myleii de spericis figuris primus* (später hinzugefügt mit grauer Tinte von einer noch sehr alten Hand).

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schluſs: . . . *et equidistat arcui* · $\overline{bg}$ · *et illud e. q. d. v.*

Anhang (fol. 238^{r}—^{v}): *Volo ostendere, quod omnium trium linearum* ... (d. h. Jordanus Nemorarius' *de triangulis* Buch 4 Satz 26—28; vgl. oben).

4.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. 329, chartac. XV saec. (in Valentinellis Katalog: XI, 5).

Was die Beschreibung dieser teilweise vom Kardinal Bessarion geschriebenen Hs. betrifft, verweise ich auf Valentinellis Katalog.

Der Inhalt ist folgender:

fol. A^{r} (Vorsatzblatt aus Pergament): leer.

fol. A^{v}: *„Epitoma Almagesti optima“* (sowohl in lat. als griech. Buchstaben). — *„Cardinalis Tusculanus“* (in lat. Buchstaben). — *„Kardinal Bessarion“* (in griech. Buchstaben).

fol. 1^{r}: $^{1}/_{4}$ Seite griechische Notizen.

fol. 1^{v}—10^{v}: leer.

fol. 11^{r}—12^{v}: Griechisch-lat. Lexikon über math. Fachwörter.

fol. 13^{r}—34^{r}: Übersetzung der Propositionen der Euklidischen *Elemente* (nach Valentinelli Authograf von Bessarion).

fol. 34^{v}—38^{v}: leer.

fol. 39^{r}—213^{r}: Georg v. Peurbachs und Regiomontanus' *Epitome Almagesti I—XIII* (die 6 ersten Sätze fehlen).

fol. 213^{v}—218^{v}: leer.

fol. 219^{r}—282^{v}: Menelaos' *Sphärik I—III.*

fol. 282^{v}—283^{r}: Scholion zu Menelaos' *Sphärik* mit der Überschrift *„Extra“*. Anfang: *Omnis trianguli arcubus circulorum magnorum* ...

fol. 283^{v}—291^{v}: leer.

fol. 292^{r}—296^{r}: Die Kapitelüberschriften aus Ptolemaios' *Syntaxis,* sowohl in der Ursprache als in lateinischer Übersetzung.

fol. 296^{v}—299^{v}: leer.

fol. 300^{r}—331^{v}: Los hingeworfene Notizen und Berechnungen (auf griechisch), die an Ptolemaios' *Syntaxis* und Theons *Kommentar* anknüpfen.

Von besonderem Interesse sind die Randnoten des Kardinals Bessarion. Wo im Texte „Abrachis“ steht, ist am Rande „Ipparchus“ hinzugefügt (z. B. fol. 64^{r}, 74^{r}, 75^{v} u. s. w.). In derselben Weise wird „Taion“ in „*Θεων*“ korrigiert. Uns interessiert in erster Reihe die Korrektur „*Μενελαος ὁ γεωμετρης*“, die fol. 132^{r}—133^{r} viermal vorkommt, wo der Text „Mileus“ hat. In Übereinstimmung hiermit treffen wir auch in dieser Hs. in den Überschriften des Menelaostextes immer den Namen „Mene-

laos" statt der von Gerhard v. Cremona eingeführten Verdrehung „Mileus" und ihrer Varianten. Bessarions Noten bezeugen seine genaue Bekanntschaft mit Ptolemaios' und Theons griechischen Texten.

5.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. 328, membr. XV saec. (in Valentinellis Katalog: XI, 63).

Was die Beschreibung dieser prachtvollen Hs. betrifft, verweise ich wieder auf Valentinelli.

Der Inhalt ist folgender:

1. Georg v. Peurbachs und Regiomontanus' *Epitome Almagesti I—XIII* (fol. 1—117).

Überschrift[1]): *Magistri Iohannis de Kunigsperg prohemium in epitomam almagesti siue magne constructionis Ptolemaei, factam partim per eum, partim per magistrum Georgium de Peurbach et dedicatam L. Reuerendissimo domino cardinali Nicaeno* (d. h. Bessarion).

2. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 120—157^{r}).

Überschrift: *Menelaus de sphaericis.*

Unterschrift: *Finit Menelaus de spheralibus figuris.*

Anhang (fol. 157^{r}—^{v}): Scholion zu Menelaos' *Sphärik* mit der Überschrift *„Extra"*[2]): *Omnis trianguli arcubus circulorum magnorum . . .*

Zu bemerken ist noch die Subskription auf dem Vorsatzblatt: *Epitoma per magistrum Georgium de Peurbach et eius discipulum magistrum Johannem de Kunigsperg et Menelai de sphericis liber b. Cardinalis Tusculani* und gleich danach dieselbe Subskription auf griechisch.

6.

Cod. Vaticanus lat. 3380, chartac. XVI saec. 28,7 × 21 cm.

Dieser von mehreren Händen geschriebene Sammelband hat bald Kolumnen, bald keine, eine sehr variierende Schriftfläche und Zeilenzahl. Im ganzen enthält der Codex zwei Vorsatzblätter und 322 numerierte Textfolien.

Das erste Vorsatzblatt führt die Inskription: *Libro di mathematica, scritto di mano di Pomponio Ceçio Cardinale.*[3]) Der Inhalt ist folgender:

1. Theodosios' *Sphärik I—III* (defekt) (fol. 1^{r}—24^{r}).

Überschrift: *Theodosius de speris.*

Anfang: *Spera est figura Corporea una quidem superficie contenta, intra quam unum punctorum . . . .* Im Schlufs ist der Text nicht fertig geschrieben, indem nur die Propositionen abgeschrieben sind, und Platz für die Beweise offen gelassen.[4])

---

1) Da der Text offenbar von einem professionellen Schönschreiber geschrieben ist, diese Überschrift aber von einer anderen Hand, so vermute ich, dafs diese Überschrift eine Dedikation an Bessarion von Regiomontanus ist.

2) Dieses Scholion ist mit dem im vorigen Codex (fol. 282^{v}—283^{r}) identisch.

3) Pomponio Cesio oder Cecio wurde im Jahre 1542 Kardinal, war als Papst designiert, starb aber in demselben Jahre. Er war sehr gelehrt und beschäftigte sich mit Philosophie und Mathematik.

4) Der Theodosiostext fängt hier mit dem von der kürzeren Theodosiosrezension bekannten Wortlaut an (vgl. Bibl. math. 1902, p. 67); später aber, wenigstens von Satz 9 des ersten Buches an, stimmt der gegenwärtige Text ganz mit dem der längeren Theodosiosrezension und enthält auch Campanus' Kommentar.

fol. 24^{v}—26^{v} sind leer.

fol. 27^{r} enthält ein Fragment von 15 Zeilen.

fol. 27^{v}—70^{v} sind leer.

2. Levi ben Gersons *Astronomie*[1]) *I—III* (fol. 71^{r}—230^{r}).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Hec ait Leo de balneolis habitator amayte* (?)[2]): *Premissis his, que ad intentionem nostram necessaria uidebantur, et quorum scientia omitti non potuit . . .*

Schlufs: . . . *in ea est linea* $\overline{bf}$ 8^{0} $16'$ $19''$, *et hoc est, quod voluimus declarare.*

fol. 231^{r}—280^{v} sind leer.

3. Menelaos' *Sphärik I—III*[3]) (fol. 281^{r}—315^{v}).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: . . . *et equidistat arcui* $\overline{gb}$ *et illud est q. d. v.*

4. Campanus, *de proportione et proportionalitate* (Überschrift) fol. 315^{v}—319^{v}.

Anfang: *Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis unius ad alteram . . .*

Schlufs: . . . *erit ista data secundam magnitudinem quare et reliqua illi equalis.*[4])

fol. 320^{r}—322^{v} sind leer.

7.

Cod. S. Marco Florent. 184 (Bibliotheca Laurenziana) membr. XV saec. 28,5 × 20,3 cm.

Diese Hs. habe ich vorläufig nur oberflächlich einsehen können. Der Menelaostext (ohne Figuren), und zwar der reine Gerhardsche Text steht daselbst fol. 47^{r}—79^{v}. Der Text ist aber defekt, da 6 Blätter schon vor der Paginierung weggeschnitten sind, und zwar 2 zwischen fol. 57 und 58, 1 zwischen 63 und 64, 1 zwischen 66 und 67, 1 zwischen 76 und 77 und 1 zwischen 79 und 80. Auch in anderen Beziehungen ist diese Hs. als minderwertig zu bezeichnen.

8.

Cod. S. Marco Florent. 213 (Biblioteca nazionale), mit der neuen Signatur „*Conventi soppresi* J, V, 30", membr. XIV (?) saec. 29,5 × 23,3 cm.

Die Sätze sind nicht am Rande aufgezählt, und meine Aufzählung halte ich nicht für sicher, aufser was das erste Buch betrifft, welches 32 Sätze hat.

1) Dieses Werk ist in drei Bücher mit bezw. 136, 9 und 14 Kapiteln geteilt. Aus einer Randnote (fol. 168^{v}) geht hervor, dafs das Werk vor dem Jahre 1336 beendet war. Das Werk findet sich auch im Cod. Vatic. 3098, chartac. XV saec. fol. 1^{r}—108^{r}.

2) Cod. Vat. 3098 hat *aisrayce;* Levi ben Gerson wohnte in Avignon.

3) In den geschriebenen Katalogen der Vaticanischen Bibliothek wird der Menelaostext dieser Hs., der durch keine Überschrift kenntlich ist, dem Levi ben Gerson beigelegt.

4) Ich kann nicht dafür einstehen, dafs Campanus' Text nicht schon früher (fol. 317^{v} Mitte) schliefst und zwar an der Stelle: . . . *de propositis quoque sufficit, quod dicimus. Ex omnibus istis elicitur una notabilis propositio . . .* An der entsprechenden Stelle schliefst Campanus' Text wenigstens in der folgenden Hs.

Auch diese Hs. habe ich nur oberflächlich untersucht. Der Menelaostext, und zwar die reine Gerhardsche Übersetzung steht fol. 45^{r}—52^{v}, die drei Bücher bezw. mit den Überschriften: *Incipit liber primus Millei Romani de figuris spericis. — Incipit liber secundus Millei de speris. — Incipit liber tertius Millei Romani de figuris spericis.*

B.

Diese Klasse, die den von Campanus kommentierten Menelaostext enthält, fällt in zwei Abteilungen (nennen wir sie I und II); in I steht der Kommentar noch am Rande, in II ist er in den ursprünglichen, von Gerhard von Cremona gegebenen Text eingefügt, so dafs der Urtext in den meisten Fällen äufserlich vom Kommentar nicht zu unterscheiden ist. Es gehören zu Abteilung

I.

9.

Cod. Palatinus lat. 1351, membr. XIV saec. (ca. 1300—1325), 23,3 × 16,7 cm.

Dieser Codex besteht aus 287 numerierten Textfolien und 1 unnumerierten (zwischen fol. 133 und 134). In der ersten Quaternion (fol. 1—8) fehlen zwei der äufseren Lagen, so dafs die Handschrift im Anfang defekt ist und nach fol. 8 eine Lücke von zwei Folien aufweist. Der ganze Text ist mit einer Hand (sehr deutlich) geschrieben, die Schriftfläche 13,5 × 8,5 cm, die Zeilenzahl bis auf fol. 233 ist 33, darnach 27; keine Kolumnen; im Rande der Folien 234^{r}—287^{v} (Menelaos' *Sphärik*) findet sich ein Kommentar, welcher mit derselben Hand wie der Text geschrieben ist. Dagegen sind einzelne Notizen, sowie mehrere Textüberschriften von Händen hinzugefügt, die dem 16. Jahrh. gehören. Die am meisten vorkommende ist jünger als 1558; denn fol. 201^{v} als Note zu Theodosios' *Sphärik* I, 21 schreibt sie: *Haec est 23 Maurolicj,* und Maurolycus' Theodosiosausgabe sowie seine eigene *Sphärik* erschien im Jahre 1558 (vgl. Seite 19).

Der Inhalt ist folgender:

1. Euklids *Elemente I—XV*[1]) (fol. 1^{r}—195^{v}), defekt. Der Text fängt mit dem Schlufs des Beweises I, 3 an: *exeunt a centro eiusdem circuli ad circumferentiam* . . . (Es fehlen die Sätze I, 39—44, der Schlufs von I, 38 und der Anfang von I, 45.)

Schlufs: . . . *quare assignato corpori constat nos speram, quemadmodum propositum erat, inscripsisse.*

2. Theodosios' *Sphärik* I—III[2]) (fol. 196^{r}—233^{r}).

---

1) Dieser Euklidtext ist der von Campanus' Ausgabe her bekannte. Campanus' Kommentar ist in den Text eingefügt.

2) Dieser Theodosiostext hat, wie der in den folgenden Hss. (Nr. 11 und 13), 3 Bücher mit bezw. 32, 31 und 10 Sätzen, fällt hauptsächlich mit dem in Venedig 1518 gedruckten mit bezw. 33, 31 und 15 Sätzen zusammen, ist dagegen nicht mit dem in den Codd. Paris. 9335, S. Marco Venet. 332 und S. Marco Flor. 206 (Conventi soppressi J, I, 32) befindlichen mit bezw. 22, 22 und 13 Sätzen zu verwechseln. Der gegenwärtige Text enthält Campanus' Kommentar eingefügt.

Anfang: *Spera est figura solida una tantum superficie contenta . . .*

Schlufs: . . . *sicut processimus in demonstratione antepremisse quartam.*

3. Menelaos' *Sphärik* I—III [1]) (fol. 234^{r}—287^{v}).

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: . . . *et equedistat arcui .bg. et illud est, quod declarare uoluimus. Expletus est tractatus tertius libri Milej de spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

10.

Cod. Vindobonensis lat. 5277, chartac. ca. 1525 (vgl. den Handschriftenkatalog).

Diese vielbenutzte Hs. enthält den Menelaostext, einen Teil (fol. 171^{r}—185^{r}) in Abschrift von Johs. Vögelin, den Rest (fol. 361^{r}—378^{v}) in Abschrift von einer mir unbekannten Hand, aber von Vögelin korrigiert. Dieser letzte Teil ist eine Abschrift nach der vorigen Hs (Cod. Palat. 1351). Campanus' Kommentar hat Vögelin teils am Rande, teils hinten (fol. 381^{v}—385^{v}) hinzugefügt.

II.

In folgenden 3 Hss. ist Campanus' Kommentar in den Menelaostext eingefügt:

11.

Cod. Reginensis lat. 1261, membr. XIV saec. (ca. 1350—1375), 24,9 × 17,5 cm.

Dieser Codex besteht aus einem Vorsatzblatt mit altem Inhaltsverzeichnis und 296 numerierten Textfolien; zuletzt findet sich ein leeres Blatt. Die 24 Quaternionen bestehen aus je 6 Lagen. Die letzte Quaternion ist nur teilweise beschrieben gewesen, deswegen ist auch ihr 9. Blatt leer, und die drei letzten Blätter (10—12) in den Einband aufgenommen. Der Codex ist also vollständig. Der ganze Text ist von einer Hand geschrieben; Randnoten von einer zweiten gleichzeitigen kommen sehr häufig vor. Die Schrift ist sehr deutlich, die Schriftfläche 17,2 × 10 cm, die Zeilenzahl 40, keine Kolumnen. Die Erhaltung ist ausgezeichnet. Treffliche mathematische Figuren und rot-blaue Initialen zieren den ganzen wertvollen Codex. Der Inhalt ist folgender:

1. Gebers sog. *Almagestum minor I—VI* [2]) (fol. 1^{r}—49^{r}).

Astronomische Auslegungen mehrerer der Sätze im 3. Buch hat die erste Hand am Rande hinzugefügt. Die Überschriften der 3 Bücher (bezw. „*Theodosius*", „*Theodosij sphaericorum liber 2*" und „*THEODOSII SPERICORUM liber III*") sind von 3 verschiedenen Händen des 16. Jahrh. hinzugefügt.

1) Die Überschriften der drei Bücher: „*Menelaus de sphaericis ex Arabica translatione latinè uersus, et scholijs utilibus auctus*" und „*Liber primus Milei de Spericis*" über Buch 1, „*Secundus liber incipit*" über Buch 2 und „*Tertius liber*" über Buch 3 sind von verschiedenen jüngeren Händen geschrieben.

2) Die 6 Bücher haben bezw. 17, 36, 25, 19, 28 und 25 aufgezählte Sätze. Von den Überschriften ist nur die über Buch 4 bemerkenswert. Sie heifst: *Explicit liber tercius, concinens universam de motu solis doctrinam. Incipit liber 4us de motu lune.*

Überschrift: *Incipit liber primus almagesti minoris.*

Anfang: *Omnium recte philosophancium non solum uerisimilibus et credibilibus argumentis, sed et firmissimis rationibus deprehensum est, formam celi sphericam esse motumque ipsius orbicularem . . .*

Schlufs: *. . . quod non est circulus transiens super duo loca solis et lune. Nam uisus locus lune, tunc ipse locus solis et inclinationes quidem tenebrarum sic se habent.*

Anhang (fol. 49^{v}): 2 grofse Figuren zu den Planetenbewegungen und dazu ein kleiner Text: *Nota: · p · est centrum terre, · o · centrum ecentrici deferentis . . . a primo argumento ad hoc quod diximus.*

2. Jordanus Nemorarius' *de ponderibus*[1]) (fol. 50^{r}—55^{v}).

Überschrift: *Incipit pars prima libri Jordani de nemore de ratione ponderum.*

Anfang: *Omnis ponderosi motum esse ad medium, uircutemque ipsius esse potenciam ad inferiora . . .*

Schlufs: *. . . et ideo plus impelletur · a ·, quia motum plus impedit, totoque conatu impulsum habebit trahere · b ·. Explicit pars 4^{a}, et cum ea finitur liber Jordanis* (sic!) *de ratione ponderis.*

Anhänge (fol. 55^{v}—58^{r}):

1. *Si fuerit aliquod corpus ex duobus mixtum corporibus notis, et uelimus scire, quantum in eo sit de utroque ipsorum . . .* (7 Zeilen)

2. *Si fuerit canonium simmetrum magnitudine et substantie eiusdem . . .* (24 Zeilen)

---

1) Das Buch mit dem Titel *de ponderibus, de ratione ponderum, de ponderosa et leui* oder *de ponderositate* liegt in mehreren Versionen vor (5 sind mir bis jetzt begegnet) und geht teils unter Euklids, teils unter Jordanus' Namen. Ich unterscheide:

1. einen Text mit 13 Sätzen, die mit langen Beweisen versehen sind (Cod. Vatic. 2975, fol. 164^{r}—171^{r}).
2. einen Text mit denselben 13 Sätzen, wo jeder derselben nur mit einem kurzen *Comentum* (Erklärung) versehen ist (Cod. Palat. 1377, fol. 19^{r}—20^{v}).
3. einen Text mit 47 Sätzen, von denen die ersten 13 ganz mit denen in Text 1 übereinstimmen (Cod. Vatic. 3102, fol. 29^{r}—35^{r});
4. einen Text mit 45 oder (durch Vereinigung der 3 letzten) 43 Sätzen, entweder wie hier im Cod. Regin. 1261 in 4 *partes* mit bezw. 10, 12, 6 und 17 Sätzen geteilt, oder ein Buch mit fortlaufenden Satznummern ausmachend wie in dem Drucke: *Jordani opusculum de ponderibus Nicolai Tartaleae studio correctum* . . . Venetiis apud Troianum Curtium 1565. Die 5 ersten Sätze dieser Version fallen mit den 5 ersten der vorigen zusammen, 6—7 mit 8—9 der vorigen, 8—43 entsprechen wesentlich 14—47 der vorigen, und den Sätzen 10—13 der vorigen entsprechen die Anhänge 2—5 im Cod. Regin. 1261.
5. einen Text mit 9 Sätzen, den ich in den Codd. S. Marco Flor. 206 und 213 (Conventi soppressi J, I, 32 und J, V, 30) traf. Diese 9 Sätze fallen mit den 9 ersten der ersten Version zusammen. Einen Text, wieder mit 9 Propositionen, den ich im Cod. S. Marco Venet. 332 (Valentinelli XI, 6), XIII saec. fol. 257^{r}—259^{r} angetroffen habe, und der in den Schlufsworten von dem ebengenannten Text abweicht, habe ich mit den übrigen 4 Versionen nicht vergleichen können. Doch vermute ich, dafs auch die 9 Sätze dieses Textes mit den 9 ersten in den obengenannten Texten 1—3 identisch sind; im Venetianer Codex fol. 259^{r}—260^{v} folgt nämlich ein *liber de canonio* mit 4 Sätzen, die mit den Sätzen 10—13 der obigen Texte 1—3, d. h. mit den Anhängen 2—5 des Textes 4 der gegenwärtigen Hs. zusammenfallen.

3. *Si fuerit proportio ponderis in termino minoris portionis* . . . (13 Zeilen)

4. *Estque ex hoc manifestum, quoniam* (sic!) *si fuerit canonium simmetrum* . . . (1 Seite)

5. *Si fuerit canonium datum longitudine, spissitudine et grauitate* . . . (1 Seite)

6. *Omne pondus cum quotlibet ponderibus ab eo continue sumptis* . . . (7 Zeilen)

7. *Si trianguli tria latera coaceruentur medietatisque compositi ad singula latera differentie*[1]) . . . (Beweis:) *Regula hec in arabico conscripta dicitur* . . . · *klm* · *ducatur in* · *ε* ·, *radix producti erit area trianguli. Explicit.*

8. Anonym, *de natura cometarum* (fol. 58r—59r).

Anfang: *Occasione comete, que nuper apparuit, applicui animum ad cogitandum de natura cometarum, et quod mihi indaganti de eis innotuit ad communem utilitatem in lucem proferre curaui* . . .

Schluſs: . . . *et ex similitudine affectionis, quam imprimit in mentibus uidencium, potest connici qualitas rei future, cuius est signum. Explicit.*

9. Anonym, Nativitätsberechnung[2]) (fol. 59r—60v).

Anfang: *In nomine patris et filii et spiriti sancti uolo supponere, quod natiuitas mea fuerit sub ascendente uirginis post mediam noctem, que sequitur diem sancti dyonisii, et quod dies crastina fuerit dies mercurii. Ex hoc arguo natiuitatem fuisse annis domini* · *1200* · *mensibus a martio* · *7* · *et diebus* · *9* · *perfectis* . . .

Schluſs: . . . *et eodem anno perfecti erunt anni alquoquodeu* (sic!) *cum augmento fere.*

10. Euklids *Elemente I—XV*[3]) (fol. 61r—197v).

Überschrift der Seite: · *1* · *liber geometrie* (so auch in den folgenden).

Anfang: *Punctus est, cui pars non est. — Linea est longitudo sine latitudine. — . . .*

Schluſs: . . . *quare assignato corpori constat nos speram, quemadmodum propositum erat, inscripsisse. Explicit.*

11. Theodosios' *Sphärik I—III* (fol. 197v—222v).

Überschrift der Seiten im 1. Buch: · *1* · *liber Theodosii de speris, et dicitur* · *16* · *geometrie,* im 2. Buch: · *2* · *Theodosii de speris, qui dicitur* · *17* · *geometrie,* im 3. Buch: · *3* · *Theodosii de speris, qui dicitur* · *18* · *geometrie.*

Anfang: *Spera est figura solida, una tantum superficie contenta* . . .

Schluſs: . . . *sicut processimus in demonstratione antepremisse per quartam. Explicit Theodosius.*

12. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 223r—257v).

Überschrift der Seite: · *1* · *liber Milei de figuris sphericis* (so auch in den folgenden).

---

1) Am Rande steht: *hec est pars phyloteigni et debet ei subiungi.*

2) Dieser Text ist am Rande von der zweiten Hand stark kommentiert. Aus dem Inhalt des Textes und den vielen Hinweisungen auf bekannte Werke, die die Randnoten enthalten, wäre vielleicht eine genaue Zeitbestimmung dieser Hs. zu gewinnen.

3) Der Text ist der von Campanus kommentierte. Der Kommentar ist in den Text eingefügt, wird aber oft durch die Worte: „*addiciones*" oder „*intraposita*" hervorgehoben. Dasselbe gilt auch Text 6 und 7; vgl. Seite 145 Note 2.

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: *. . . et equidistat arcui · bg · et illud est quod demonstrare uoluimus. Expletus est tractatus primi · 2 · tertii libri Milei de figuris spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

8. Jordanus Nemorarius' *Planisphaerium*[1]) (fol. 257ᵛ—261ᵛ).

Überschrift der Seite (mit erster Hand): *Planisperium.*

Überschrift des Textes (mit jüngerer Hand): „Planispherivm".

Anfang: *Speram in plano describere*[2]) *est singula puncta eius in plano quolibet ordinare secundum similitudinem situs . . .*

Satz 1: *Spera in quolibet polorum planum contingente, in cuius . . .*

Schlufs: *. . . representabit punctus · f · in plano polum circuli decliuis, et hec est intentio auctoris de nouo appositum. Explicit.*

9. Anonym, *de speculis comburentibus*[3]) (fol. 262ʳ—265ʳ).

Überschrift (mit jüngerer Hand): „De specvlis combvrentib".

Anfang: *De sublimiori quod geometre adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt . . .*

Schlufs: *. . . Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum. Explicit de speculis comburentibus.*

10. Apollonios' sog. *de pyramidibus*[4]) (fol. 265ʳ—266ʳ).

Überschrift: *Ista sunt, que sequuntur, in principio libri Apollonii de piramidibus, et sunt anxiomata* (sic!), *que premittuntur in libro illo.*

Anfang: *Cum continuatur inter punctum aliquod . . .*

Schlufs: *. . . et nominatur linea erecta linea, super quam posite sunt linee protracte ad diametrum secundum ordinem.*

11. Gerhards (v. Cremona?) *Algorismus I—II*[5]) (fol. 266ᵛ—289ʳ).

---

1) Dem gegenwärtigen von Campanus (vgl. unten) überarbeiteten *Planisphaerium* bin ich in den Codd. Basil. F, II, 33 und S. Marco Venet. VIII, 32 (Valentinelli XI, 90; vgl. unten) begegnet. Der reine, mit Satz 1 anfangende Text: *„Spera in quolibet punctorum* (oder *polorum*) *. . . in communi ergo sectione ipsius et circuli · poyh · est in · o · sicut illius puncti, quod proponebatur"* findet sich im Cod. Vatic. 3096 fol. 140ᵛ—143ʳ (membr. XIV saec.) mit dem Titel *„Planisperium Jordani"* und stimmt mit dem Texte in dem Drucke: *Sphaerae atque astrorum caelestium ratio natura et motus* etc. . . . Valderus 1536 überein.

2) Über der Zeile hat zweite Hand hier geschrieben: *Hec est diffinitio planisperii;* vgl. vorige Note.

3) Zu meinen Notizen über diese und die folgende Schrift (vgl. Bibl. math. 1902, p. 71) ist noch hinzuzufügen: Diese zwei Texte finden sich im Cod. Regin. 1253 (XIV saec.), und zwar *de pyramidibus* fol. 62ʳ—63ʳ, *de speculis comburentibus* fol. 63ʳ—69ᵛ, letzterer mit dem Titel *liber de arte speculorum comburentium;* gleich danach folgt im Cod. Reg. 1253 die aus dem Cod. Paris. 9335 (vgl. Bibl. math. 1902, p. 68) bekannte Aufrechnung der mittleren Bücher *„secundum Johannitium"*. Im Cod. Palat. 1377 bildet der Text *Tideus: de speculis* mit dem Titel: *liber Tadei de speculis* (fol. 11ᵛ—14ʳ) einen Text mit dem Texte *de speculis comburentibus* (fol. 14ʳ—18ᵛ); hier fehlt aber der im Cod. Paris. 9335 zwischen die beiden eingeschaltete Text *de pyramidibus.* Ein innerer Zusammenhang der 3 Texte dürfte kaum stattfinden.

4) Ediert in Heibergs Apolloniosausgabe, Prolegomena, p. LXXV ff.

5) Im Cod. Digby 61 heifst das Werk: *Algorismus magistri Genardi in integris et minutiis,* vgl. *Cat. Codd. Mss. Bibl. Bodl. IX confecit* Macray, Oxonii 1883, p. 63—64 und Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cre-*

Überschrift: *Tractatus magistri Gernardi* (sic!) *de algorismo.*

Anfang: *Digitus est omnis numerus minor decem. — Articulus est omnis numerus, qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum . . .*

Satz I, 1: *Ex maximo et minimo cuiuslibet limitis numero constat primus numerus limitis proximo loco superioris. Verbi gratia sint . . .*

Schlufs: *. . . et quanto sepius multiplicaueris, tanto propinquiorem radicem inuenies sicut ex premissis patere potest. Hec sunt, que de minuciis scienda et ideo colligenda putaui, et eia* (?) *finit..*

12. Notiz über Astrolabien (fol. 289^{r} letzte Hälfte).

Anfang: *Cuiuslibet artis studium ad astronomiam spectat, uidelicet a qua habet originem . . .*

Schlufs: *. . . ergo que est primi ad secundum, ea est secundi ad 3^{m}; ergo circuli proportionales, et hoc est propositum.*

13. Johannes' (de Monte Pessaluno?) *Quadrans vetus*[1]) (fol. 289^{r}—292^{v}).

Überschrift: *Practica geometrie.*

Anfang: *Geometrie due sunt partes principales, theorica et practica. Theorica est quando . . .*

Schlufs: *. . . sic de similibus corporibus siue sint laterate columpne siue laterate piramides siue conice, spere uel quomodolibet aliter se habencia similia corpora. Explicit.*

14. Buch über praktische Geometrie in 4 *partes*[2]) (fol. 292^{v}—296^{r}).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Artis cuiuslibet consummatio in duobus consistit in thorice* (sic!) *et practice . . .* (es folgt eine Lobrede über die praktische Geometrie und dann kommt:) *Vobis igitur super geometrie practicam iocundum tractatum et fructu memorem instruimus, uidelicet quod de magistri nostri fonte dulcius hausimus, sicientibus propinemus* (sic!). *Opus autem nostrum in · 4 · distinguimus partes. In prima planimetriam instruimus superficierum quantitates inuestigando. In secunda capacitates corporum et crassitudines inuenire docemus. In tertia geometricas et astronomicas minucias ad predicta necessarias docere promittimus. In 4^{a} altimetriam mensurare alta docebimus, ita ut principaliter geometrie secundario astronomie hoc opus deseruiat. Theorice igitur exordiamus.*

(Satz 1) *Linee recte quantitaten podismari. Esto . . .*

Schlufs: *. . . eorum ingenio exercitando ex industria non ignorancia pretermisimus, et hec de crassimetria sufficiant.*

12.

Cod. Vatic. lat. 4571, membr. XIV saec. (ca. 1350—1375) 32,5 × 24,0 cm.

Dieser Codex besteht aus 21 numerierten Textfolien und einem leeren Schlufsblatt. Die Folien 1—18 bilden 3 Quaternionen aus je 3 Lagen;

monese, Roma 1851, p. 57. Das Werk hat im Cod. Regin. 1261 2 Bücher mit bezw. 43 und 42 Sätzen; von diesen fehlen im Cod. Digby 61 die Sätze II, 9—42, wenn Macrays Angaben richtig sind.

1) Über diesen in zahlreichen Hss. vorkommenden Text vgl. z. B. Steinschneider, Hebräische Übers. p. 611—613.

2) Über diesen Text, der mir sonst nicht begegnet ist, kann ich keine Aufschlüsse geben. Die ganz kurzen Sätze sind nicht aufgezählt. Der gegenwärtige Text dürfte übrigens nicht vollständig sein.

jedes der letzten 3 Folien ist für sich hinzugefügt. Die Schriftfläche ist 23,5 × 17,0 cm; die Schrift steht in 2 Kolumnen, deren jede 23,5 × 7,8 cm mifst. Die Zeilenzahl variiert zwischen 52 und 55. Der Text mit Ausnahme von fol. 21 ist von einer Hand geschrieben. Datierungen oder Subskriptionen kommen nicht vor. Der Inhalt ist folgender:

1. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 1^r—20^v).

Überschrift: *Primus liber Millei in figuris spericis.*

Anfang: *Declarare volo qualiter faciam . . .* —

Schlufs (fol. 18^v): *. . . et equidistat arcui bg · et illud est quod declarare voluimus. Expletus est tractatus primi · 2 · 3 · libri Milei de figuris spericis, et cum eius completione completus est totus liber eius.* Die Figuren zum Menelaostexte folgen fol. 19^r—20^r; die Figur zu III, 5 ist verzeichnet.

2. Textfragment (fol. 21), dessen Inhalt weder mit der Mathematik noch mit den Naturwissenschaften zu thun hat.

13.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. VIII, 32, membr. XIV saec. (in Valentinellis Katalog XI, 90).

Was die Beschreibung dieser Hs. betrifft, verweise ich auf Valentinelli. Der Inhalt ist folgender:

1. Theodosios *Sphärik I—III*[1]) (fol. 1^r—35^r).

Überschrift: *Incipit 1us liber Theodosii de speris.*

Anfang: *Spera est figura solida, una tantum superficie contenta . . .*

Schlufs: *. . . sicut processimus in demonstratione antepremisse per quartam. Explicit liber Theodosii de speris cum commento Capani* (sic!).

2. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 35^r—84^v).

Überschrift: *Incipit 1us liber Milei de arcubus.*

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: *. . . et equedistat arcui · bg · et illud est quod demonstrare uoluimus. Expletus est tractatus primi, 2^i et tercii libri Milei de figuris spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

3. Jordanus Nemorarius' *Planisphaerium* (fol. 84^v—90^r).

Überschrift: *Incipit planisperium.*

Anfang: *Speram in plano describere est singula puncta eius in plano quolibet ordinare secundum similitudinem situs . . .*

Schlufs: *. . . representabit punctum · f · in plano polum circuli decliuis, et hec est intentio auctoris de nouo appositum. Explicit.*

4. Anonym, *de speculis comburentibus*[2]) (fol. 90^r—94^v).

Überschrift: *Incipit liber de speculis comburentibus.*

Anfang: *De sublimiori quod geometri* (?) *adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt . . .*

Schlufs: *. . . Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum. Explicit de speculis comburentibus.*

---

1) Die Texte 1—3 haben alle den Kommentar des Campanus in den Text eingefügt. Vgl. oben Seite 145 Note 2 und Seite 149 Note 1.

2) Über die Texte 4—5 vgl. oben Seite 149 Note 3.

5. Apollonios' sog. *de pyramidibus*[1]) (fol. 94r—96r).

Überschrift: *Ista sunt, que sequuntur, in primo* (?) *libro Apollonii de piramidibus, et sunt anxiomata* (sic!), *que premittuntur in libro illo.*

Anfang: *Cum continuatur inter punctum aliquod . . .*

Schlufs: *. . . et nominatur linea recta linea, super quam posite sunt linee protracte ad diametrum secundum ordinem.*

Von den bis jetzt ermittelten lateinischen Menelaoshandschriften harren noch folgende einer Untersuchung (vgl. Seite 12):

14. Cod. Rheno-Trajectoriae 725 (Utrecht),
15. Cod. Parisinus 7251,
16. Cod. Bodleianus 6556 . 9 (verschollen?),
17. Cod. Digby 168 (Oxford), nur Fragmente, und
18. Cod. Digby 178 (Oxford), nur Fragmente.

2.

Dem Leser sind wir noch den Nachweis schuldig, dafs der Kommentar, dem wir in den zur Klasse B gehörenden Menelaoshss. begegneten, in der That Campanus zuzuschreiben ist. Dieser Nachweis ist unserer Ansicht nach nicht unwichtig; denn die Würdigung des Campanus ist bis jetzt sehr unsicher gewesen; der Nachweis aber, dafs er derjenige ist, der Menelaos' *Sphärik* kommentiert hat, entschleiert zugleich, wie wir sehen werden, eine umfangreiche Thätigkeit, die Campanus als Kommentator entfaltet hat, und von der wir bisher nur teilweise unterrichtet waren.

In den Codd. S. Marco Venet. VIII, 32 (d. h. Valentinelli XI, 90), Reginensis 1261 und Palatinus 1351 (vgl. oben) findet sich Theodosios' *Sphärik* mit einem Kommentar, welcher in der erstgenannten dieser Hss. dem Campanus beigelegt wird (vgl. oben Seite 151 und Bibl. math. 1902, p. 67). Gleich auf den Theodosiostext folgt in allen drei Hss. der kommentierte Menelaostext. Deswegen ist natürlich noch kein zwingender Grund vorhanden, auch Campanus den Menelaoskommentar beizulegen.

Eine genauere Untersuchung der beiden Kommentare macht es aber unzweifelhaft, dafs sie denselben Urheber haben. Der Kommentar zu Theodosios II, 15 (entspricht II, 12 des griechischen Textes) hat nämlich diesen Passus: *De lineis autem inequalibus dico, quod maior resecabit maiorem arcum et minor minorem; que autem maiorem resecat arcum, illa est maior, que autem minorem, illa est minor. Quod hic proponitur de facili probabitur eodem argumentationis genere, quo auctor probat principale propositum; et ualet istud ad · 8 · Milei, ubi dicitur in commenti fine illius 8e: „et erit linea egrediens ex · z · ad · d · etc.“* — In den fünf mir bekannten Hss., die den kommentierten Menelaostext enthalten, begegnen wir in der That auch im Beweise des Satzes I, 8 den Worten: *et erit linea egrediens ex · z · ad · d ·*, und als Kommentar dazu (in den Codd. Palat. 1351 und Vindob. 5277 also am Rande) den Worten: *hoc patet per hoc, quod ego apposui ad 15 secundi Theodosii.*

1) Dieser Text ist Valentinelli entgangen.

Wenn also der Theodosioskommentar, wie es in der Venetianer Hs. angegeben wird, von Campanus herrührt, so ist dasselbe mit dem Menelaoskommentar der Fall. Dafs die Angabe der Venetianer Hs. richtig ist, läfst sich aber nicht bezweifeln Die Kommentare müssen nämlich im 13. Jahrh. verfafst sein; denn sie finden sich in Abschrift in Hss., die noch im ersten Drittel des 14. Jahrh. geschrieben sind, wie Cod. Palat. 1351, und in dem Kommentar zu Menelaos III, 1 wird Jordanus Nemorarius zitiert mit den Worten: *secundum quod definit Jordanus in commento octauae propositionis noni libri arismetice sue;* ferner kommen in den Kommentaren zu den zwei sphärischen Werken mehr als ein Mal Hinweisungen auf den wohlbekannten Euklidkommentar des Campanus vor. An der Autorschaft Campanus' zweifelte auch der Kardinal Pomponus Ceçio nicht; fügt er doch in seiner Abschrift von Theodosios' *Sphärik,* d. h. Cod. Vatic. 3380 (vgl. oben) fol. 21^{r} bei den Textworten: *hoc enim necesse est, quemadmodum demonstrauimus in prima decimi* am Rande hinzu: *nota, quod hinc constat hanc esse expositionem Campani.*

Nunmehr nimmt es kein Wunder, dafs im Cod. Regin. 1261 die drei Bücher der *Sphärik* des Theodosios als Buch 16—18 der *Elemente* aufgezählt werden (vgl. Seite 148). Campanus hat eben die *Elemente* des Euklid und die *Sphärik* des Theodosios als Fundament der Geometrie betrachtet und hat die beiden Werke, denen meistens auch Menelaos' *Sphärik* hinzugefügt wurde, mit weitläufigen Kommentaren und einem ganzen Netz von gegenseitigen und zwar sehr nützlichen Hinweisungen versehen.

Ich vermute nun, dafs Campanus' Herausgeberthätigkeit (denn so müssen wir sie nennen) mit diesen drei Kommentaren noch lange nicht erschöpft ist. Ein Werk wenigstens kommt hinzu, nämlich Jordanus' *Planisphaerium,* von welchem ein kürzerer, reiner und ein längerer mit Kommentar versehener Text vorliegt, und dieser Kommentar ist wahrscheinlich auch dem Campanus zuzuschreiben. Im Cod. Regin. 1261 (vgl. oben) folgt das kommentierte *Planisphaerium* gleich nach den drei von Campanus kommentierten Werken, und in dem Kommentar kommen Hinweisungen auf alle drei Werke mehrmals vor. Wie viele aber von den Texten, die eben in den Hss. des 14. Jahrh. in zwei Rezensionen vorliegen, Campanus überarbeitet hat, mufs ich dahingestellt sein lassen. Obwohl die Entwickelungsgeschichte der Mathematik bis auf Newton nur klar zu legen ist durch die Feststellung und Identifikation der in den lateinischen mittelalterlichen Hss. befindlichen Texte, so ist in dieser Beziehung noch verhältnismäfsig sehr wenig gethan, und Campanus ist nur einer unter vielen, deren wissenschaftliche Thätigkeit und Bedeutung für die Nachwelt noch nicht festgestellt ist.

Ich darf hier nicht zu nennen versäumen, dafs Campanus möglicherweise der Urheber ist eines seinerzeit von Steinschneider öfters erwähnten und dem Thâbit îbn Korrah beigelegten kleinen Textes mit dem Titel: *De figura sectore,* welcher in den zwei Drucken: *Sphaera mundi,* Venedig 1518 steht. Im Cod. Vatic. lat. 3098, chartac. XIV—XV saec. hat dieser Text (fol. 109^{r}—^{v}) nämlich die Überschrift: *Expositio magistri Campani in figura sectore,* und im Cod. S. Marco Flor. 184, wo seine letzte Hälfte gerade hinter dem reinen Menelaostexte folgt (an der Übergangsstelle ist

eben ein Blatt weggeschnitten), steht im alten Inhaltsverzeichnis vorne in der Hs.: *Tractatus Milei et Campani.* Thâbits Werk mit demselben Titel, welches ich nach Cod. Arsenalis 1035 untersucht habe, und das ich kürzlich in dem bisher unbekannten Cod. Neapolit. VIII, E, 33 fand, ist jedenfalls viel gröfser als der gedruckte Text und nicht einmal teilweise mit diesem identisch. Übrigens ist Thâbits Werk eine recht bedeutungslose Leistung und der dem Campanus beigelegte gedruckte Text durchaus wertlos.

3. (Vgl. Seite 8.)

In einem Aufsatz in der Bibl. math. 1901 habe ich Seite 204 die Unbrauchbarkeit der lateinischen Ausgaben (Nürnberg 1537 und Bologna 1645) von Al-Battanis *Astronomie* festgestellt. Ob der Übersetzer, Plato von Tivoli, oder vielmehr der Herausgeber die Schuld daran hat, konnte ich aber damals nicht entscheiden. Ich habe nun Gelegenheit gehabt, die Übersetzung handschriftlich zu untersuchen, und kann konstatieren, dafs Platos Übersetzung, so wie sie in den Handschriften vorliegt, mit dem arabischen Texte sehr gut übereinstimmt. Der Herausgeber hat somit entweder seine Vorlage, namentlich was die Zahlen betrifft, konsequent mifsverstanden, oder er hat eine sehr schlechte Handschrift benutzt. In der Schätzung von Plato von Tivoli als Übersetzer schliefse ich mich deswegen vollständig Curtze an (vgl. *Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli,* ed. Curtze, Einleitung p. 6). — Die von mir benutzten lateinischen Al-Battanihss. sind Cod. S. Marco Venet. VIII, 14 (Valentinelli XI, 60), membr. XIV saec. und Cod. Vatic. 3098, chartac. XIV—XV saec.

4. (Vgl. Seite 13 Note 50.)

Dafs es mir nicht gelungen ist, in Deutschland lateinische Menelaoshss. aufzufinden, ist recht sonderbar, da Regiomontanus sicher solche aus Italien nach Nürnberg mitgebracht hat (vgl. Seite 19, Note 65 und Seite 98). Eine Bestätigung meiner Annahme, dafs man in Nürnberg um das Jahr 1500 den Menelaostext besafs, fand ich kürzlich in einem Werke eines der Nachfolger Regiomontanus', dem *liber de triangulis sphaericis* von Johannes Werner. In diesem steht nämlich (Buch 2, Satz 10): *Hanc* ⟨propositionem⟩ *Menelaus iuxta codicem, qui in fuit potestate mea demonstravit in propositione secunda libri tertii.* Die nähere Untersuchung dieses und anderer Wernerschen Zitate bestätigt, dafs der Nürnberger Stadtpfarrer die Gerhardsche Übersetzung von Menelaos' *Sphärik* benutzte, und zwar sehr ergiebig.

Nähere Aufschlüsse über Werners Werk, das man als verschollen betrachtet hat (vgl. Cantor II, p. 417 und v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 133), das ich aber in einer Hs. der Vatikanischen Bibliothek gefunden habe, wird man in der Bibl. math. 1902, Heft 2 und ff. finden können.

NACHTRÄGE UND BERICHTIGUNGEN

ZU

„DIE MATHEMATIKER UND ASTRONOMEN DER ARABER UND IHRE WERKE“.

VON

HEINRICH SUTER

IN ZÜRICH.

Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke".

Es ist kaum zu vermeiden, dafs bei der Abfassung eines Werkes von vorherrschend bibliographischer Natur, wie meine Arbeit: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900), wo man so viele Quellen zu Rate zu ziehen hat, wo man hauptsächlich umfangreiche Kataloge durchgehen mufs, die eine oder andere Quelle unberücksichtigt gelassen, hier und da eine Katalogstelle übersehen werden kann. Es sind mir in neuester Zeit noch einige Werke über arabische Mathematiker und Astronomen zur Kenntnis gekommen, die mir leider bis jetzt unerreichbar waren, und die ich für die folgenden Notizen benützt habe, so z. B.: Steinschneider, *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters* (Berlin 1893)[1]); (Robles), *Catálogo de los manuscritos árabes existentes en la bibl. nacional de Madrid* (1889)[2]); C. A. Nallino, *I manoscritti arabi, persiani, siriaci e turchi della bibl. nazionale e della R. accad. delle scienze di Torino* (1900)[3]); *Collections scientifiques de l'Institut des langues orientales de St. Pétersbourg*, t. I. (Mss. arabes décrits par le Baron V. Rosen), St. Pétersb. 1877[4]), et t. III. (Mss. persans décrits par le même), ibid. 1886[5]); *Cataloghi dei codici orientali di alcune biblioteche d'Italia* (Firenze 1878 u. flg.).[6]) Sodann hat mich Hr. Prof. C. A. Nallino in Neapel durch private Mitteilungen auf eine Reihe von Verbesserungen aufmerksam gemacht; ich spreche

---

1) Wird zitiert mit „Steinschneider, *Hebr. Übers.*"

2) Wird zitiert mit „*Madrid.*"

3) Wird zitiert mit „*Turin*" und bezieht sich nur auf die Mss. der Bibl. nazionale in Turin.

4) Wird zitiert mit „*St. Petersb. Inst. A.*"

5) Wird zitiert mit „*St. Petersb. Inst. P.*"

6) Wird zitiert mit „*Cat. d'Italia*"; der Inhalt von 4), 5) und 6) wurde mir, soweit es die Mathematik und Astronomie betrifft, von Hrn. C. A. Nallino in Neapel gütigst mitgeteilt.

diesem ausgezeichneten Gelehrten, dessen Kenntnisse auf dem Gebiete der mathematischen, astronomischen und geographischen Litteratur der Araber wohl von wenigen Orientalisten der Gegenwart erreicht werden mögen, hier öffentlich meinen ergebensten Dank für seine gütige Hilfe aus.

Zu Art. 2, 7, 27 u. 28: Nach NALLINO ist „NAUBACHT" (pers. = neues Glück) die richtige Lesart, nicht „NÛBACHT."

Zu Art. 7 u. 11: Es ist vielleicht der unter den Übersetzungen GERARDS von CREMONA genannte *liber alfadhol i. est arab de bachi* (?) ein Werk dieses FAḌL B. NAUBACHT (s. Art. 7) oder dann des FAḌL B. SAHL EL-SARACHSÎ (s. Art. 11).

Zu Art. 8: Für lat. und hebr. Übersetzungen von Schriften MÂŠÂLLÂHS verweise ich auf STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 599—603, und auf HOUZEAU, *Bibliogr. génér. de l'astron.* I, p. 700—702.

Zu Art. 13: Das Buch der Fragen *(masâ'il)* von ʿOMAR B. EL-FARRUCHÂN EL-ṬABARÎ (oder von seinem Sohne MUḤ. B. ʿOMAR, s. Art. 34) befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (NALLINO.)

Zu Art. 14: Wie mir Hr. NALLINO mitteilt, sind die im Escurial (922, jetzt 927) noch vorhandenen Tafeln wirklich diejenigen des JAḤJÂ B. ABÎ MANṢÛR, genannt die „erprobten Mâmûnischen" Tafeln, mit Einschiebungen aus den Tafeln des KÛŠJÂR, IBN EL-AʿLAM und ABÛ'L-WEFÂ.

Zu Art. 19 u. Anmerkg. 5ᵃ: Zur Zeit, da ich diese Artikel schrieb, war mir die ausgezeichnete Abhandlung NALLINOS: *Al-Chuwârizmî e il suo rifacimento della geografia di Tolomeo* (in den Atti della R. accad. dei Lincei, $2_5 : 1$, 1894) noch nicht bekannt, worin der Verfasser nachweist, daſs die von SPITTA BEY aufgefundene, jetzt in Straſsburg (L. arab. Cod. Spitta 18) befindliche Schrift des MUḤ. B. MÛSÂ, betitelt *ṣûrat el-arḍ* (Figur der Erde), eine nach dem Stande der geographischen Kenntnisse der Araber zur Zeit EL-MÂMÛNS gemachte Umarbeitung der Geographie des PTOLEMÄUS sei. MUḤ. B. MÛSÂ verfaſste ferner für EL-MÂMÛN ein Kompendium des groſsen *Sindhind*, den MUḤ. B. IBRÂHÎM EL-FAZÂRÎ aus dem indischen *Siddhânta* übersetzt, oder nach demselben bearbeitet hatte; der *Fihrist* identifiziert dieses Kompendium des *Sindhind* mit den astronomischen Tafeln des MUḤ. B. MÛSÂ. Zu diesen Tafeln schrieb ein gewisser MUḤ. (od. AḤMED) B. MUṮANNÂ (od. MUṮÂNÂ) B. ʿABDELKERÎM, über den wir nichts weiteres wissen, einen Kommentar, der in Form von Frage und Antwort abgefaſst und für einen MUḤ. B. ʿALÎ B. ISMÂʿÎL geschrieben war; dieser Kommentar existiert nur noch in einer hebräischen

Übersetzung des ABRAHAM B. ESRA in der Bodl. (Mich. 835) und in Parma (de Rossi 212), betitelt *Ṭa'amê lûchôt Alchowârezmî* (Gründe der Tafeln des CHOWÂREZMÎ.) (Vergl. STEINSCHNEIDER, in Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **24**, 1870, p. 339—391, und *Hebr. Übers.* p. 572.) — Hr. NALLINO giebt in der genannten Abhandlung eine Stelle aus den Annalen EL-ṬABARÎS (Ser. III. T. II. p. 1363) wieder, aus welcher der Schlufs gezogen wird, dafs EL-CHOWÂREZMÎ, welcher dort noch die Beinamen EL-MAĞÛSÎ EL-QOṬROBBOLÎ [= der Magier aus Qoṭrobbol (am Euphrat)] hat, i. J. 232 (846/47) beim Tode des Chalifen EL-WÂṬIQ noch am Leben war. Ich habe sein Todesjahr zwischen 220 und 230 angesetzt, was nun also vielleicht in 230—240 zu verbessern ist, doch mufs ich hierüber noch folgendes beifügen: MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ und MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR sind jedenfalls öfters von den spätern Schriftstellern der Araber verwechselt worden (vergl. auch Anmerkg. 6 meines Buches). So glaube ich, dafs der von dem Chalifen EL-WÂṬIQ zu dem oströmischen Kaiser behufs Besichtigung der Höhle der Siebenschläfer gesandte MUH. B. MÛSÂ EL-MUNAĞĞIM (der Astrolog oder Astronom, so heifst er bei IBN CHORDÂḎBEH, *kitâb el-masâlik we'l-mamâlik:* Biblioth. geograph. arabic. P. VI, p. 106) der i. J. 259 (873) gestorbene MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR sei, denn von diesem wird berichtet, dafs er nach den oströmischen Ländern gereist sei, um wissenschaftliche Werke daselbst zu erwerben; IBN CHORDÂḎBEH berichtet (l. c.), dafs ihm MUH. B. MÛSÂ der Astronom selbst von dieser Reise erzählt habe, das hätte wohl um das Jahr 250 (864), um welche Zeit höchst wahrscheinlich IBN CHORDÂḎBEH das genannte Buch geschrieben hat, MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ nicht mehr thun können. EL-MOQADDESÎ schrieb i. J. 378 (988/89) in seinem *kitâb ahsan el-taqâsîm* (Biblioth. geograph. arabic. P. III, p. 362) nach IBN CHORDÂḎBEH über eine Gesandtschaftsreise, die MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ EL-MUNAĞĞIM im Auftrage EL-WÂṬIQS zu ṬARCHÂN, dem König der Chazâren gemacht habe, ich glaube, dafs dies wiederum MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR ist, und dafs EL-MOQADDESÎ ihn mit dem ältern MUH. B. MÛSÂ verwechselt, und deshalb „EL-CHOWÂREZMÎ" noch von sich aus hinzugefügt hat. IBN ROSTEH erwähnt in seinem *kitâb el-a'lâq el-nafîse* (Biblioth. geograph. arabic. P. VII, p. 266) einen Auftrag des Chalifen EL-MUTAWAKKIL (232—247, 847—61) an MUH. B. MÛSÂ EL-MUNAĞĞIM zur Auswahl eines Bauplatzes für eine zu gründende Stadt, auch dies ist wohl MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR. Zur Bestätigung der oben ausgesprochenen Vermutung über den Träger der Sendung nach der Höhle der Siebenschläfer erwähne ich noch, dafs MAS'ÛDÎ in seinem *kitâb el-tanbîh we'l-išrâf* (Biblioth. geograph. arabic. P. VIII, p. 134) diesen Gesandten

geradezu MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR EL-MUNAĞĞIM nennt.[1]) An andern Stellen dieses Buches (p. 186, 199 und 222) wird MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ, bezw. blofs EL-CHOWÂREZMÎ, mit seinen Tafeln erwähnt, ohne den Beinamen EL-MUNAĞĞIM. Man ersieht aus allem diesem, dafs das strenge Auseinanderhalten beider Autoren schwierig ist, und deshalb ist auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs EL-ṬABARÎ in der oben zitierten Stelle den MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR, der gewöhnlich EL-MUNAĞĞIM genannt wird, mit dem ältern MUH. B. MÛSÂ verwechselt hat, und also von sich aus, wie dies EL-MOQADDESÎ gethan haben mag, „EL-CHOWÂREZMÎ" hinzugefügt hat; ich will allerdings nicht verschweigen, dafs der Beiname EL-MAĞÛSÎ, der aber nur bei EL-ṬABARÎ vorkommt, eher für die andere Ansicht spricht, die Hr. NALLINO in der genannten Abhandlung vertritt. Um schliefslich das Material zu dieser Frage zu vervollständigen, soweit wir es imstande sind, sei noch erwähnt, dafs einige arabische Quellen[2]) noch einen dritten MUH. B. MÛSÂ erwähnen, der den Beinamen EL-ĠALÎS (der Gesellschafter, Genosse) hatte, und ebenfalls Astrolog und Zeitgenosse von JAḤJÂ B. ABÎ MANṢÛR und noch von ABÛ MAʿŠAR war.

Zu Art. 24: Nach NALLINO ist „SENED" (oder SANAD) die richtige Lesart, nicht „Sind".

Zu Art. 26: Das Buch „über die Urteile aus den Gestirnen" (*kitâb aḥkâm el-nuǧûm*) des SAHL B. BIŠR befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (NALLINO.)

Zu Art. 29: JAḤJÂ B. EL-BAṬRÎQ übersetzte noch aus dem Griechischen ins Arabische die Meteorologie des ARISTOTELES, die arabisch in hebräischer Schrift vorhanden ist im Vatikan (Hebr. Nr. 378), nach STEINSCHNEIDER, *Schriften d. Araber in hebr. Handschr.*, in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 47, 1893, p. 342.

Zu Art. 31: Nach NALLINO wurde das hier genannte astrologische Werk des IBN HIBINTÂ nach 330 (941/42) verfafst; die von mir gemachte Angabe 214 befindet sich im Münchener Katalog von AUMER.

Zu Art. 39: EL-FARĠÂNÎS „Elemente der Astronomie" existieren in der hebr. Übersetzung des JAKOB ANATOLI noch in Berlin (Cat. v. STEINSCHNEIDER 116), München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 46), Wien (176), Vatican (385), Oxford (Bodl. Hunt. 414, Mich. 48, 49, 835), etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 554—55.

Zu Art. 43: (p. 21, Note b): Die Lesart des Textes „über die erste Bewegung der Sphäre" ist nach NALLINO die richtige; es ist dies die täg-

1) Im Inhaltsverzeichnis dieses Bandes der Bibl. geograph. ist aber dieser Autor mit MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ EL-MUNAĞĞIM identifiziert.

2) ABÛLFAR. p. 248, Übers. 161, und IBN EL-QIFṬÎ, Münchener Ms. 440, fol. 108ᵃ.

liche scheinbare Bewegung des ganzen Himmelsgewölbes von Ost nach West, welche die arabischen Astronomen „die Bewegung des Universums“, oder „die erste Bewegung“ nennen. — Ich habe p. 21, Z. 7 v. o. das arabische *bi-ṭarîq ta'lîmî* mit „durch Vernunftgründe“ übersetzt, Hr. NALLINO zieht vor zu übersetzen „auf mathematischem Wege“; ich weifs wohl, dafs *ta'lîmî* sehr häufig die Bedeutung „mathematisch“ hat, aber was soll dann das folgende „auf geometrischem Wege“ noch bedeuten? — In St. Petersb. Inst. A. (Nr. 191, 3°) befindet sich ein astrologisches Werk, das den Söhnen MÛSÂS zugeschrieben wird, es heifst *kitâb el-daraǧât* (das Buch der Grade), über die Natur (das Wesen) der Grade, übersetzt aus den Büchern und Gelehrten Indiens. ROSEN teilt ein gröfseres Stück aus der Vorrede mit, woraus sich ergiebt, dafs das Buch eine verbesserte Redaktion von drei wahrscheinlich aus dem Indischen ins Arabische übersetzten Werken ist. Es beginnt nach der Vorrede mit den Worten: „Das ist der Anfang dessen, was wir aus dem Buche übersetzt haben. Es sagt der Autor des Buches: Die Sphäre (d. h. der Zodiacus) wird in 360 Teile geteilt, und jeder dieser Teile wird Grad genannt.“ Das Buch handelt also über die astrologische Natur jedes der 360 Grade des Zodiacus. (NALLINO.) Ist dieses Werk vielleicht identisch mit dem „Buch der drei“ von MUH. (p. 21, Z. 4 v. o.), aus dem man bis jetzt nichts machen konnte, oder mit dem „Buch über den Teil“ (p. 21, Z. 5 v. o.), von dem das gleiche gilt? — „Die Mechanik“ befindet sich auch in Gotha (1349) und in Berlin (5562)

Zu Art. 45, p. 25 u. Art. 95, Note e): Das Instrument *dât el-šo'batain* ist nach NALLINO das *Organon parallaktikon* des PTOLEMÄUS, oder die parallaktischen Lineale (auch *triquetrum*). — Das „*dawârad hamzaǧ*“ konnte ich, wie auch FLÜGEL (Ausgabe des *Fihrist*, I. Bd. p. 21) nicht erklären; nun finde ich nachträglich in der Arbeit HORNS: „*Aus italienischen Bibliotheken*“ (Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **51**, 1897, p. 15) als Titel eines persischen Ms. des Vaticans (Nr. 68): *duwâzdeh burǧ-i falak el-aflâk* (die zwölf Häuser des Thierkreises); es ist also wohl unzweifelhaft, dafs statt *dawârad hamzaǧ* zu lesen ist *duwâzdeh burǧ* (die zwölf Häuser), was in arabischer Schrift leicht in das erstere übergehen kann. — Von EL-KINDÎ existieren hebräische Übersetzungen von folgenden Abhandlungen; „Über die Nativitäten“, in München (304), Paris (1028, 1055, 1056), Vatican (477); „über den Regen,“ in Paris (1055); „über die den höhern Wesen beigelegten Ursachen, welche die Entstehung des Regens bedingen“, in München (304, 356), Paris (1028, 1055), Vatican (477); vielleicht alle drei von KALONYMOS B. KALONYMOS übersetzt (vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 562—64).

Zu Art. 53: Für weitere lateinische Übersetzungen von Werken Abū Ma'šar's vergl. Houzeau, *Bibliogr. génér. de l'astron.* I, 702—05.

Zu Art. 60: „Das Buch der astronomischen Beobachtungen" ist zu streichen: Ḥāǧī Chalfa III, 470 erwähnt blofs die Beobachtungen, die von Abū Ḥanīfa gemacht worden sind, aber kein Buch über dieselben. (Nallino.)

Zu Art. 62: „Über den Umlauf der Geburtsjahre" ist vielleicht in einer lateinischen Übersetzung des Plato von Tivoli noch vorhanden in Paris (7439, 4°): Alkasen filii Alkasit (el-Ḥasan b. el-Chaṣīb?) *liber de nativitatum revolutionibus.* Im Text heifst es nach Boncompagni (*Delle versioni fatte da Platone Tiburtino.* Estratto p. 40) allerdings: Alkasen filii Achasitil. (Vergl. auch Steinschneider in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 24, 1870, p. 336.) — Sein *Liber de nativitatibus* existiert auch in hebräischer Übersetzung des Isaak Abū'l-Chair b. Samuel (1498) in Paris (1033, 1091). (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 546.)

Zu Art. 66: p. 35: Das Ms. 4104 (Hebr.) des Brit. Mus. enthält arabisch aber in hebräischer Schrift: *kitāb tashīl el-meǧisṭī* (das Buch der Erleichterung des Almagestes), wahrscheinlich unvollständig (vergl. Steinschneider, *Schriften der Araber in hebr. Handschr.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 47, 1893, p. 367); es ist dies entweder das Werk, dem ich p. 35, Z. 5 v. o. den Titel „das Buch der Auslegung (Kommentar) des Almagestes" gegeben habe, oder dann das unmittelbar folgende; in der That steht bei Ibn Abī Uṣaibi'a I, 218 bei beiden Werken das Wort *tashīl* (Erleichterung), das ich etwas freier mit „Erklärung" bezw. „Auslegung" übersetzt habe. — p. 35 oben und p. 36 unten ist statt „Über die Rechnung nach den Neumonden" zu lesen „Über die Berechnung des Erscheinens der Neumonde". (Nallino.) — p. 35, Note b): Das Pariser Ms. 2457, 13° handelt nach Nallino nicht über die Trepidation der Fixsterne, sondern über die Ungleichheiten der Bewegung der Sonne, von den Alten mittelst exzentrischem Kreis und Epicykel erklärt. Über die Trepidation handelt ein Brief Ṯābits an Isḥāq b. Ḥonein, der durch Ibn Jūnis uns erhalten geblieben ist (vergl. Caussin, Notices et extr. VII, p. 114—118). Sehr wahrscheinlich handelte darüber auch die arabisch nicht mehr vorhandene Schrift „über die Bewegung der Himmelssphäre" (p. 35, Z. 10 v. o.), die aber wahrscheinlich noch in lateinischer Übersetzung existiert unter dem Titel: *de motu octavae sphaerae*, in Paris (7195, 14°, und 16211)[1]), im Vatican (4275 und 4083, in verschiedener Übersetzung (Nallino)), oder *de motu accessionis et recessionis*, in Paris

1) Vergl. Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge* (Paris 1819), p. 73—75.

(9335), in Florenz (St. Marco, Armar. 4, Nr. 27; bei MONTFAUCON, p. 428), in Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567); gedruckt wurde dieselbe hinter SACRO BOSCOS *Sphaera* und GERARDS *Theorica planetarum*, in Bologna 1480 und Venedig 1518 (vergl. STEINSCHNEIDER, in Zeitschr. für Mathem. 18, 1873, p. 331—338). Ferner erwähnt STEINSCHNEIDER (l. c.) noch folgende lateinische Übersetzungen ṯâbit'scher Schriften: *de quantitatibus stellarum*, Paris (7215, 6⁰); *de proportionibus*, Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567), es ist dies vielleicht seine Abhandlung über das zusammengesetzte Verhältnis; *de proprietatibus quarundam stellarum*, Paris (7337, 22⁰); *de recta imaginatione*[1]) *sphaerae coelestis*, Paris (7195, 12⁰), Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567). — p. 36: „Über die befreundeten Zahlen" befindet sich auch in Konstant. (4830, 4⁰); diese Schrift wurde von WOEPCKE im Journ. asiat. 20_4, 1852, eingehend besprochen. — p. 37: Die Lesart *qarasṭûn* ist die richtige, nicht *farasṭûn*, vom griech. χαριστίων (vergl. auch DOZY, *Suppl. aux dictionn. arabes*, t. II, p. 327). (NALLINO.) — Seine Abhandlung über „die Transversalenfigur" wurde von KALONYMOS B. KALONYMOS (1313) ins Hebräische übersetzt, und befindet sich in Oxford (Bodl. Hunt. 96 = NEUB. 2008). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 588—90.)

Zu Art. 77: p. 41: „Über die Rechnung *el-talâqî* auf dem Wege der Algebra"; hierzu vergl. man: Zu Art. 204. — „Über den Gebrauch des Himmelsglobus" befindet sich auch in spanischer Übersetzung in den *Libros del saber de astronomia*, Vol. I, p. 153—208: *Libro de la fayçon dell'espera et de sus figuras et de sus huebras di* COZRA *el sabio* (NALLINO); ebenso in hebräischer des JAKOB B. MACHIR in München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 246, 249, 261), Paris (1030, 1031, 1053, 1065), Oxford (Bodl. Mich. 835), Brit. Mus. (Alm. 213), etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 552. In lateinischer Übersetzung existiert sie aufser in Oxford noch in Wien (5273, 7⁰). (CURTZE). — Seine Übersetzung der Sphärik des THEODOSIUS ist auch noch arabisch in hebräischer Schrift in Paris (Hebr. 1101) vorhanden (vergl. STEINSCHNEIDER, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 47, 1893, p. 367); diejenige von HERONS Mechanik (über das Heben der Lasten) befindet sich auch im Brit. Mus. (Add. 23394) und in Konstant. (2755); sie wurde aufser von CARRA DE VAUX noch herausgegeben von L. NIX: HERONIS *Alexandrini opera quae supersunt omnia*, Vol. II, Fasc. I (Leipzig 1900).

Zu Art. 78: p. 43, Z. 1 u. 4 v. o.: Statt Nr. 2 ist zu lesen Nr. 3 und umgekehrt. Die Übersetzung des Kommentars zum *Centiloquium* des

1) DELAMBRE (l. c. p. 75) hat *magnitudine* statt *imaginatione*.

PTOLEMÄUS habe ich nach STEINSCHNEIDER dem PLATO VON TIVOLI zugewiesen (s. p. 43, Note c), obgleich, wie mich NALLINO darauf aufmerksam macht, BONCOMPAGNI in seiner Schrift *Delle versioni fatte da PLATONE TIBURTINO* etc." (Atti dell' accad. pontif. de' Nuovi Lincei 1852 und Estratto, Roma 1851) diese Übersetzung PLATOS nicht kennt; es ist dies freilich kein zwingender Beweis gegen die Ansicht STEINSCHNEIDERS, welcher aus der Jahresangabe (530 d. H.) auf PLATO schliefst, da er nirgends in den Übersetzungen des JOH. HISPALENSIS eine Jahresangabe in muhammedanischer Zeitrechnung gefunden habe.

Zu Art. 81: Von ABÛ KÂMIL ŠOǦÂʿ B. ASLAM befinden sich wahrscheinlich noch drei Abhandlungen in latein. Übersetzung in Paris (7377 A.): die erste beginnt fol. 93 und ist ein Bruchstück seiner Algebra; dann folgt sub Nr. 5: *Scholium de mensuratione pentagoni et decagoni*, mit dem Anfang: *dixit Abu Camel Ssagia fil. Ibrahim* (!) *aggregator istius libri;* endlich sub Nr. 6: *Anonymi tractatus de arithmetica;* es sind dieses seine in Leiden (1003) arabisch vorhandenen „unbestimmten Aufgaben". Alle drei Abhandlungen existieren in hebräischer Übersetzung von MORDECHAI FINZI (um 1473), in München (225) und Paris (1029). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 584—88.)

Zu Art. 88: Der Kommentar des ANARITIUS (EL-NAIRÎZÎ) zu den Elementen des EUKLIDES in der Übersetzung des GERARD VON CREMONA befindet sich wahrscheinlich auch in einer spanischen Bibliothek, nämlich in derjenigen des Bischofs GONZALO PALOMEQUE in Cuenca (vergl. R. BEER, *Handschriftenschätze Spaniens*, Wien 1894, p. 147).

Zu Art. 89: Nach NALLINO ist die Angabe des *Fihrist* richtig, dafs EL-BATTÂNÎ auf der Feste *Ǧiṣṣ* (JÂQÛT liest *Ǧaṣṣ*) bei *Sarr-man-ra'a* (oder nach JÂQÛT besser *Surra-man-râ'a*) und nicht auf der Feste *Ḥaḍr*, wie IBN CHALLIKÂN berichtet, gestorben sei. — Nach demselben Gelehrten hat das Ms. des Escurial der Astronomie des BATTÂNÎ 244, nicht 229 Blätter; ebenso hält er die Angabe, dafs dieses Werk in zwei Ausgaben erschienen sei, für unrichtig; es wäre also das Jahr 299 für die Örter der Fixsterne zu korrigieren in 267 (880/81), und meine Anmerkung 20[a] fiele dahin. Derselbe hält auch die Abhandlungen *Centiloquium*, *de horis planetarum*, *de ortu triplicitatum*, die einem BETHEN zugeschrieben werden, nicht für solche EL-BATTÂNÎS, jedenfalls haben sie nichts mit dem Buche „über die Kenntnis der Aufgänge der Häuser" zu thun.

Zu Art. 96: Ich glaube, dafs für diesen Arzt und Geometer der richtige Name EL-MÂWARDÎ sei; der Philosoph ABÛ JAḤJÂ EL-MERWAZÎ hatte nach MAS'ÛDÎ (*kitâb el-tanbîh we'l-išrâf:* Biblioth. geograph. arab. P. VIII, p. 122) den Namen IBRÂHÎM.

Zu Art. 99: *Zîǧ el-ṭailisân* (oder besser *el-ṭailasân*); nach NALLINO soll es sich um eine kleine Tabelle zur Berechnung des Tagebogens der Sonne und der Äquinoktialzeiten handeln; der Name *ṭailasân* soll von der Form der Tafeln (Rechteck mit Diagonale) herrühren, jedes der dadurch entstehenden Dreiecke heifst *ṭailasân*. — In Leiden (1107) befindet sich ein astrolog. Werk, betitelt: Das Buch der Gesamtheit der Urteile aus den beiden Finsternissen und der Konjunktion der beiden Planeten Saturn und Jupiter etc., gesammelt und verfafst von ABÛ'L-QÂSIM B. MÂĞÛR aus den Schriften IBN KÂBIRS (?), EL-KINDÎS, IBN (ABÎ) EL-CHAṢÎBS, SAHL B. BIŠRS und HERMES': darin wird allerdings eine Konjunktion aus dem Jahre 699 d. H. erwähnt, was entweder ein Fehler ist, oder das Werk ist nicht von IBN AMÂĞÛR.

Zu Art. 116: JÛḤANNÂ B. ḤAILÂN, der Lehrer EL-FÂRÂBÎS in Philosophie, wird von MAS'ÛDÎ im *kitâb el-tanbîh we'l-išrâf*, l. c., p. 122 erwähnt, und sein Tod in die Regierungszeit des Chalifen EL-MOQTADIR (295 bis 320, 908—932) gesetzt. — EL-FÂRÂBÎS „Kommentar zu den Schwierigkeiten der Einleitungen des 1. und 5. Buches des EUKLIDES" ist noch in hebräischer Übersetzung wahrscheinlich von MOSES B. TIBBON vorhanden in München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 36 und 290), nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 509.

Zu Art. 119: „Über die Tagewählerei" existiert in lateinischer Übersetzung (*de electionibus*) von demselben Übersetzer (ABRAHAM SAVASORDA) auch in Paris (16 208), aber mit dem Übersetzungsjahr 1133. (NALLINO.)

Zu Art. 124: „Über die Neigung (Schiefe) der partiellen Neigungen" kommt Hrn. NALLINO, wie übrigens auch mir, unklar vor, der erstere schlägt vor zu lesen: *fî mail el-aǰzâ'* (über die Neigung der Teile, d. h. der einzelnen Grade des Zodiacus).

Zu Art. 132: EL-QABÎṢÎS Einleitung (*madchal*) befindet sich auch arabisch in hebräischer Schrift in Oxford (Hebr. I, 453), nach STEINSCHNEIDER (Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 351); die erste lateinische Ausgabe erschien nicht in Venedig 1485, sondern in Bologna 1473, darauf folgen diejenigen von Venedig aus den Jahren 1481 u. 82, dann erst diejenige aus dem Jahre 1485 (vergl. HOUZEAU, *Bibliogr. de l'astron.* I, p. 705). — Die Abhandlung „über die Konjunktionen der Planeten", von der ich nur eine französische Übersetzung angegeben habe, ist von JOH. HISPALENSIS ins Lateinische übersetzt worden, und ist im Druck herausgegeben, in Venedig 1485, 1511 u. 1521, als Anhang zu seinem *liber introductorius* oder *ysagogicus* unter dem Titel: *Tractatus notabilis* ALCHABITII *de conjunctionibus planetarum in duodecim signis et earum pronosticis in revolutionibus annorum.* — Nach seinen eigenen An-

gaben im *liber introduct.* verfaſste EL-QABÎṢÎ auch ein Buch über die *numûdârât* (Horoskope), und ein anderes *in confirmatione magisterii iudiciorum astrorum et in destructione epistolae Haissebenhali* (ḤASAN B. ʿALÎ?) *in annulatione eius ex ratiocinatione.* (NALLINO.)

Zu Art. 138 u. Anmerkg. 30: „Das Buch der Fixsterne" befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 185), in einem vorzüglichen Ms., das von SCHJELLERUP bei seiner Ausgabe nicht benützt worden ist. (NALLINO.) — Die „Abhandlung über das Astrolabium und seinen Gebrauch" ist auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 190, 4⁰) vorhanden. (NALLINO.) — Die „Arǧûza über die Fixsterne" ist nicht von ʿABDERRAḤMÂN EL-ṢÛFÎ, sondern von seinem Sohne ABÛ ʿALÎ B. ABÎ'L-ḤOSEIN (ḤASAN) EL-ṢÛFÎ, worauf ich auch in Anmerkung 30 hingedeutet habe; der Anfang des Gedichtes nach der Anrufung Gottes heiſst: „Dies sind die Worte ABÛ ʿALÎS, des Sprösslings *(naǧl)* ABÛ'L-ḤASANS EL-ṢÛFÎ," und der letzte Vers beginnt: „es erwähnt sie (die Sterne) mein Vater in seinen Büchern." Ein Exemplar dieser *Arǧûza* existiert auch in Bologna (ROSEN, *Les manusc. orient. de la collection Marsigli à Bologne;* Roma, Accad. dei Lincei, Memorie 12_3, 1884, Nr. 422). (NALLINO.)

Zu Art. 148: Über MUḤ. B. LURRA finde ich nachträglich eine Stelle im *kitâb el-aʿlâq el-nafîse* von IBN ROSTEH (Biblioth. geograph. arab. P. VII, p. 160), wo es im Art. „die Stadt Iṣpahân" heiſst: „MUḤ. B. IBRÂHÎM, bekannt unter dem Namen MUḤ. B. LUDDA' (al. LURRA) EL-IṢPAHÂNÎ, der Geometer, hat sie ausgemessen, er sagt": (folgen die Angaben über ihre Gröſse, Zahl und Namen der Thore etc.) Da IBN ROSTEH sein Werk c. 290 (903) geschrieben hat, so muſs MUḤ. B. LUDDA vor oder um diese Zeit gelebt und geschrieben haben.

Zu Art. 150: Durch die Worte ḤAǦÎ CHALFAS: „dixit duos se vidisse etc." ist keineswegs bestimmt, daſs ʿOṬÂRID nach EL-BATTÂNÎ gelebt habe; denn FLÜGEL übersetzt unrichtig; statt „prior—posterior" sollte es heiſsen: „alter—alter" (arab. *el-aḥad—el-âchar*). (NALLINO.)

Zu Art. 167, p. 72 u. Note b): NALLINO hält die Tafeln *el-ṣâmil* in Florenz (Pal. 289) nicht für diejenigen des ABÛ'L-WEFÂ, sondern nur für eine Umarbeitung (oder Neuausgabe) derselben durch einen Anonymus; dieselben befinden sich auch in Paris (2528 u. 29) und im Brit. Mus. (395, 3⁰), (vergl. SUTER, *die Mathem. u. Astron.* etc., p. 227: Zu Art. 364). Die Vorrede zu denselben beginnt nach dem Pariser Ms. 2528 nach der Anrufung Gottes mit den Worten: „Ich habe diese Tafeln zusammengestellt nach den mittlern Resultaten, die von ABÛ'L-WEFÂ und seinen Genossen durch wiederholte Beobachtungen und Prüfungen der frühern Mâmûnischen Beobachtungen sichergestellt worden sind." Der Verfasser führt dann die

ʿAlâ'ischen Tafeln an (vergl. auch HAĞÎ CHALFA III, 567), ohne ihren Verfasser zu nennen, und behauptet, diese seien ein Plagiat, indem sie einfach die mittlern Resultate ABÛ'L-WEFÂS wiedergeben, während der Verfasser erkläre, sie seien nach seinen eigenen Beobachtungen mit von ihm selbst erfundenen Instrumenten aufgestellt worden. Er habe nun die Tafeln ABÛ'L-WEFÂS aufgefunden, die seine mittlern Resultate enthalten, und diese habe er nun hier veröffentlicht, nachdem er sie vorher noch durch Beobachtungen von Konjunktionen etc. geprüft hatte. — Es wäre immerhin möglich, dafs der Verfasser dieser Neuausgabe der Tafeln des ABÛ'L-WEFÂ AṬÎR ED-DÎN EL-ABAHRÎ wäre (vergl. Art. 364 u. p. 227: Zu Art. 364); dann könnte aber der Verfasser der ʿAlâ'ischen Tafeln nicht wohl MUʾJID ED-DÎN EL-ʿORḌÎ (s. Art. 368), noch weniger NIẒÂM EL-AʿRAĞ (s. Art. 395) sein, welche beide von HAĞÎ CHALFA (l. c.) als Verfasser so benannter Tafeln erwähnt werden; er nennt aufser diesen beiden auch noch EL-BÎRÛNÎ (sehr unwahrscheinlich!) und einen ʿALÂ ED-DÎN EL-NÎSÂBÛRÎ, über den ich keine weiteren Angaben gefunden habe; vielleicht sollte es bei HAĞÎ CHALFA statt MUʾJID ED-DÎN EL-ʿORḌÎ heifsen MUʾJID ED-DÎN EL-MUHANDIS (s. Art. 319), der astronomische Tafeln verfafst hat; eine weitere Vermutung wäre auch ʿALÂ EL-KIRMÂNÎ (s. Art. 205), und eine dritte, und vielleicht die wahrscheinlichste, IBN EL-ŠÂṬIR, der auch den Ehrennamen ʿALÂ ED-DÎN hatte, was ich im Art. 416 zu erwähnen vergessen habe; in diesem Falle könnte dann allerdings AṬÎR ED-DÎN EL-ABAHRÎ nicht der Verfasser der Neubearbeitung der Tafeln ABÛ'L-WEFÂS sein. Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dafs die ʿAlâ'ischen Tafeln nicht notwendig von einem ʿALÂ ED-DÎN verfafst sein müssen, sie könnten auch für einen solchen geschrieben sein und daher ihren Namen haben. — In Paris (2530) befindet sich dann noch ein Kommentar zu diesem *zîǧ el-šâmil*, betitelt *el-kâmil fî šarḥ el-zîǧ el-šâmil* (das Vollständige, über den Kommentar zu den Tafeln *el-šâmil*) verfafst i. J. 822 (1419) von SÎDÎ ḤASAN B. SÎDÎ ʿALÎ EL-QÛMNÂTÎ (?).

Zu Art. 174: Die „Einleitung in die Astrologie" befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 186.)

Zu Art. 176: EL-MAĞRÎṬÎS Bearbeitung des *Planisphäriums* des PTOLEMÄUS befindet sich auch in hebräischer Übersetzung in Oxford (Bodl. 2582) und im Brit. Mus. (Alm. 96, II.) Seine Abhandlung über das *Astrolabium* soll nicht von RUDOLF V. BRÜGGE übersetzt worden sein, sondern von JOH. HISPALENSIS; diese Übersetzung befindet sich auch in der Amplon. Sammlung (Qu. 363, 13°) und in Paris (7292, 14°). (CURTZE.) (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.*, p. 534 u. 582.)

Zu Art. 178: Ich habe p. 78 bemerkt, dafs CAUSSIN im VII. Bd. der

Notices et extr. p. 16—240 einige Kapitel aus dem Leydener Ms. der ḥâkimitischen Tafeln veröffentlicht hat; ich habe vergessen hinzuzufügen, daſs DELAMBRE in seiner *Histoire de l'astron. du moyen âge* (Paris 1819), p. 125—156 einige weitere Kapitel (im Auszug) aus dem Pariser Ms. 2496, 1° in der Übersetzung SÉDILLOTS wiedergegeben hat.

Zu Art. 182: EL-RAMÂDÎ kommt nicht von der Stadt Ramâda (richtiger Rammâda), sondern von dem arabischen Worte *ramâd* (= Asche); JÛSUF B. HÂRÛN EL-KINDÎ soll nämlich nach IBN BAŠKUWÂL (Biblioth. arab.-hisp. II, p. 614, Nr. 1376) ursprünglich den Beinamen ABÛ ĞENÎŠ (= Vater der Asche, von dem spanischen „ceniza" = Asche) gehabt haben, der dann später durch das rein arabische EL-RAMÂDÎ ersetzt worden ist. (NALLINO.)

Zu Art. 183: Die Abhandlung „über die Auffindung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten" befindet sich in Paris (2457, 20° und 49°). Als weitere Abhandlung MUH. B. EL-ḤOSEINS ist anzuführen: „Über die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei Geraden auf dem Wege der festen Geometrie", in Paris (2457, 47°); diese Abhandlung hat CARRA DE VAUX in verkürzter Form in französischer Übersetzung veröffentlicht in der Biblioth. Mathem. **12**, 1898, p. 3—4.

Zu Art. 187: Die Arbeit des ABÛ SA'D EL-'ALÂ B. SAHL, die sich in Petersb. Inst. A. (192, 12°)[1]) befindet, handelt über den Grad der Durchsichtigkeit (wörtlich Reinheit) des Himmelsgewölbes (E. WIEDEMANN übersetzt *el-falak* mit Äther), und ist einer Abhandlung (Kommentar) dieses Autors über die Optik des PTOLEMÄUS entnommen.

Zu Art. 192: „Abhandlung über die Rechenkunst". Das hebr. Ms. dieser Schrift KÛŠJÂRS befindet sich in der Bodl. Bibl. zu Oxford (OPPENH. 272 A. Qu. = NEUB. 362, 3°) unter dem Titel: *'Jjjûn ha-'iqqarîm* = „Betrachtung der Grundlehren (der Rechnung der Indier)", (vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 565—66 und in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **3**, 1880, p. 109). Der Übersetzer und Kommentator heisst SCHALOM B. JOSEF. — IDELER *(Handbuch der mathem. u. techn. Chronologie,* T. II, p. 547 u. 624ff.) giebt einige Stellen aus dem 1. Buch der „Tafeln" KÛŠJÂRS in arabischem Text und Übersetzung.

Zu Art. 194: In den *Libros del saber,* Vol. III, p. 241—271 befindet sich eine Schrift von IBN EL-SAMḤ, betitelt: *De cuemo puede ell ome faser una lámina a cada planeta segund que lo mostró el sabio Abulcacim Ab-*

---

1) So ist in Note c) statt „192 Nr. 132" zu lesen, was ich aus dem Artikel E. WIEDEMANNS in der Zeitschr. d. Deutschen Morgenl. Gesellsch. Bd. **38**, 1884, p. 145 entnommen habe.

naçalm (ABŪ'L-QÂSIM IBN EL-SAMḤ.) Die Apogeen der Planeten sind darin für das Jahr 416 (1025/26) berechnet. (NALLINO.) Diese Abhandlung ist wahrscheinlich seinen astronomischen Tafeln entnommen.

Zu Art. 196, p. 86 u. 225: Vielleicht ist IBN EL-SAFFÂRS „Kompendium astronomischer Tafeln" noch vorhanden arabisch in hebräischer Schrift in Paris (Hebr. 1102). (Vergl. STEINSCHNEIDER in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 363). — Sein Buch „über den Gebrauch des Astrolabiums" befindet sich auch im Escurial (959); in hebr. Übersetzung des JAKOB B. MACHIR existiert es in Oxford (Bodl. URI 440, Mich. 49, Reg. 46), München (246, 249, 256, 261, 289, 388), Paris (1030, 1045, 1052, 1065, 1095), Vatican (379, 384) etc. (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 580—84.)

Zu Art. 198, p. 89: Zu den Schriften IBN SÎNÂS „über die scheinbaren Entfernungen der Himmelskörper", Oxford (98Ô, 8°), und „über die Bewegung der Himmelskörper," Escurial (700, 10°) kommt noch hinzu: „über das Wesen *(ǧauhar)* der Himmelskörper", in Konstant. (4849, 16° u. 4853, 15°). — Zu der Abhandlung „über die Abschaffung (oder Nichtigkeit) der Sterndeuterei", vergl. auch MEHREN, *Vues d'Avicenne sur l'astrologie* (Le Muséon **3**, Louvain 1884, p. 383—403); ibid. **1**, p. 391—396 befindet sich auch eine Biographie AVICENNAS. (NALLINO.)

Zu Art. 204, p. 93 u. 94: In St. Petersb. Inst. A. befinden sich folgende der hier genannten Abhandlungen IBN EL-HAITAMS: Über den Zirkel der grofsen Kreise (192, 11°); über das Bild der Finsternisse (192, 2°); ausführliche Abhandlung über die Mondfiguren (192, 3°); über die Parallaxe des Mondes (192, 10°); über die Auffindung der Qible (192, 9°); über die Bewegung des Mondes (192, 6°); über eine geometrische Aufgabe (192, 8°); aufserdem noch: Über die Lösung der Schwierigkeiten der Bewegung (besser „Veränderung") der Schiefe der Ekliptik (*el-iltifâf*)[1]) (192, 1°); über die Ausmessung der Kugel (192, 4°); über die Teilung der beiden verschiedenen (ungleichen) Gröfsen, die im 1. Satze des 10. Buches des EUKLIDES erwähnt werden (192, 5°); über die Aufgaben *el-talâqî*[2]) (192, 7°). — Zur Abhandlung „über die äufsere Erscheinung des Weltgebäudes" ist zu vergleichen: STEINSCHNEIDER, *Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, p. 721ff. und **16**, 1883, p. 505—513), ebenso *Hebr. Übers.* p. 560. — Zur Abhandlung

1) WOEPCKE, *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 75, übersetzt: „Mémoire sur la solution des doutes sur le mouvement complexe".

2) Wörtlich „des Zusammentreffens"; WOEPCKE (l. c. p. 76) übersetzt: Mémoire sur les problèmes d'intersection; vergl. auch Art. 77 (QOSṬÂ B. LŪQÂ); es wäre zu wünschen, dafs diese Abhandlung einmal genauer untersucht würde.

„über eine arithmetische Aufgabe" vergl. E. WIEDEMANN in den Sitzungsberichten d. phys. Soc. in Erlangen, 24, 1892, p. 83. — Sein „Kommentar zu den Postulaten (allgemeiner: Einleitungen zu den verschiedenen Büchern) des EUKLIDES" ist noch in hebräischer Übersetzung, wahrscheinlich des MOSES B. TIBBON, vorhanden in München (Cat. STEINSCHNEIDER 36 u. 290), nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 509. — p. 95: Die dem IBN EL-HAITAM nach dem Ms. 613, 12^0 von Algier und nach HAĞÎ CHALFA IV, 549 zugeschriebene *Qaṣîde* ist nicht von ihm, sondern, wie das Berliner Ms. 5745 angiebt, von EL-HÂŠIMÎ, denn diesen nennt als Verfasser ausdrücklich der *mufîd el-moḥtâǧ* des SAḤNÛN EL-WÂNŠARÎŠÎ, Kairo 1314 (1896/97), p. 36. (NALLINO.)

Zu Art. 213: Nachdem ich den Art. ABÛ ʿABDALLÂH MUH. B. MUʿADS in STEINSCHNEIDERS *Hebr. Übers.* gelesen habe, halte ich nicht mehr an der Identität dieses Autors mit dem von mir in Art. 213 behandelten ABÛ ʿABDALLÂH MUH. B. JÛSUF B. AḤMED B. MOʿÂD fest; jener, der also wohl aus Jaen stammte, und deshalb den Beinamen EL-ĞAIJÂNÎ trug, wird also der Verfasser des noch in Algier (1446, 3^0) befindlichen Kommentars zum 5. Buche des EUKLIDES und der Schrift „über die Auffindung der Oberfläche der Kugelsegmente" sein, die noch im Escurial (955) vorhanden ist. Wahrscheinlich ist er auch der Verfasser der Tafeln „Jahen", doch steht dies noch nicht ganz fest, immerhin ist meine Anmerkung 44, p. 214 dahin zu berichtigen. Es existieren von ihm auch zwei Abhandlungen in hebr. Übersetzung von SAMUEL B. JEHUDA aus Marseille, die eine handelt über die totale Sonnenfinsternis des letzten Tages d. J. 471 (3. Juli 1079), die andere über die Morgenröthe; beide befinden sich in Paris (1036). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 574—75.)

Zu Art. 218: Die „Chronologie orientalischer Völker" von EL-BÎRÛNÎ befindet sich auch in Konstant. (2947). — Der „Mesʿûdische Kanon" ist auch im Brit. Mus. (Suppl. 756) vorhanden. (NALLINO.) — Leider lag mir bei Behandlung dieses Artikels die Textausgabe von EL-BÎRÛNÎS Chronologie durch E. SACHAU nicht vor, sondern nur die englische Übersetzung; Hr. NALLINO machte mich darauf aufmerksam, daſs in der Einleitung zu jener (p. XXXVIII—XLVIII) sich das von EL-BÎRÛNÎ selbst verfaſste Verzeichnis seiner bis zum Ende des 65. Lebensjahres (427, 1036) geschriebenen Werke befindet (arab. noch vorhanden in Leiden, 889, am Schlusse seines Verzeichnisses der Schriften des MUH. B. ZAKARÎJÂ EL-RÂZÎ). EL-BÎRÛNÎ führt hier aufser den in meinem Artikel genannten 15 Schriften, von welchen allerdings zwei nicht im Verzeichnis stehen, also wohl nach seinem 65. Lebensjahre verfaſst worden sind („das Buch der Zeugenschaft über die Nichtübereinstimmung der astronom. Beobachtungen" und „Auszug aus dem

Almagest"), noch ca. 100 Abhandlungen an, die er bis zu der genannten Zeit verfafst hat; diese alle hier zu nennen wäre unnütz, ich führe nur diejenigen an, deren Titel mir von Interesse für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften zu sein schienen:

Über die Fehler der Tafeln des CHOWÂREZMÎ. Vervollständigung der Tafeln des ḤABAŠ und die Reinigung seiner Sätze (Operationen) von Irrtümern. Ein Buch über den *Sindhind*, betitelt: die Gesamtheit der Ideen (Methoden?) der Indier über das astronomische (astrologische) Rechnen. Verbesserung der Tafeln *el-arkand*[1]) durch bessere sprachliche Wiedergabe, da die vorhandene Übersetzung unverständlich war, indem sie sich zu wörtlich an die Sprache des Originals anschlofs. Ein Buch über die beiden vereinigten (konzentrischen?) und gleichen Umläufe, betitelt: über die Vorstellung von den beiden Finsternissen bei den Indiern; es ist dies eine bekannte Idee bei ihnen, von der keine ihrer Tafeln frei ist, von der man aber bei uns nichts weifs. Richtigstellung der Elemente der Astronomie des FARĠÂNÎ, verfafst für ABÛ'L-ḤASAN MUSÂFIR. Über die Bestimmung der Gröfse der Erde durch die Beobachtung der Depression (*inḥiṭâṭ*) des Horizontes von den Gipfeln der Berge aus. Notiz über das Rechnen und die Zahlen mit den Zahlzeichen der Indier (wörtlich „von Sind und von Hind"). Abhandlung über die Auffindung der Kubik- und höheren Wurzeln. Abhandlung darüber, dafs die Ansicht der Araber über die Ordnungen der Zahlen richtiger sei als diejenige der Indier. Übersetzung dessen, was im *Brâhmasiddhânta* (im Text: „birâhamsidhânad") von Methoden der Rechenkunst vorkommt. Die (verschiedenen) Multiplikationsmethoden. Über die Ebenmachung (*tesṭîḥ*) der Bilder (Figuren) und die Ausbreitung (*tebṭîḥ*) der Länder (über Kartenprojektionen?).[2]) Notiz über die Ausmessungslehre, für MUSÂFIR EL-MOQAWWÎ geschrieben. Über die Reduktion der Eigenschaften der Transversalenfigur auf das Notwendige (Genügende). Abhandlung darüber, dafs die Unmöglichkeit der Teilung der Gröfsen bis zur äufsersten Grenze verwandt (nahe) sei der Sache der zwei Linien, welche sich nähern, und sich doch nie treffen auch in der (gröfsten) Entfernung (d. h. der Eigenschaft der Asymptoten der Hyperbel). Die Balchischen Aufgaben (Fragen) über die Ideen (Be-

1) Im Sanskrit = *ahargana* (= Summe der Tage), nach REINAUD, *Mémoire sur l'Inde*, p. 322.

2) Man vergleiche die beiden angeführten arabischen Wörter mit den Namen der beiden im Art. 1 angeführten Astrolabien EL-FAZÂRÎS: *el-musaṭṭaḥ* und *el-mubaṭṭaḥ*, wobei für Nicht-Arabisten zu bemerken ist, dafs diese letzteren die Partizipien Pass. der beiden Verben *saṭṭaḥa* und *baṭṭaḥa* sind, die „ausdehnen", „ebenmachen" bedeuten, und zu denen die oben genannten Wörter die Nomina actionis (Infinitive) sind.

deutungen), die mit der Vernichtung der Kunst (Astrologie oder Magie?) zusammenhängen. Die Antworten auf die von den indischen Astrologen eingegangenen Fragen. Die Antworten auf die zehn kašmîrischen Fragen. Abhandlung über die Geschichte der Methode der Indier in der Auffindung der Lebenszeit (des Alters eines Menschen). Über die Erklärung der Ansicht des PTOLEMÄUS über den *Sâlchodâh* (= Jahresregent in der Astrologie). Das Vollständige (Ganze) der Kunst der ebenen Darstellung (des Projizierens). Der Glanz des Geistes, über die Tafeln EL-BATTÂNÎS. Die Fehler der Tafeln des ABÛ MA'ŠAR.

Nun folgen am Schlusse des Verzeichnisses seiner Werke noch eine Reihe von Abhandlungen, die andere Gelehrte in seinem Namen[1]) geschrieben haben, ich nenne hiervon die folgenden: Von ABÛ NAṢR MANṢÛR B. 'ALÎ B. 'IRÂQ: Über die Ursache der Halbierung der Gleichung (*ta'dîl*) bei den Verfassern des *Sindhind*. Über die Verbesserung des Buches des IBRÂHÎM B. SINÂN über die Erklärung der Ungleichheiten der oberen Planeten (vergl. Art. 113 u. Note b). Abhandlung über die Verbesserung dessen, was von ABÛ ĞA'FAR EL-CHÂZIN in seinen Tafeln der Scheiben übersehen worden ist. Abhandlung über die Beweise zu dem Verfahren des MUH. B. EL-ṢABBÂḤ für die Prüfung der Sonne (wahrscheinlich die Schrift „über das Verfahren zur Bestimmung des Mittags etc.", vergl. Art. 40). Abhandlung über den Beweis zu dem Verfahren des ḤABAŠ bei (der Bestimmung) der Aufgänge der Azimute in seinen Tafeln. Über die Kenntnis der sphärischen Bögen auf anderem Wege als mittelst des zusammengesetzten Verhältnisses. Die Tafel der Minuten. Über eine zweifelhafte Stelle im 13. Buche des EUKLIDES.[2]) — Von ABÛ SAHL 'ÎSÂ B. JAḤJÂ EL-MASÎḤÎ (vergl. Art. 180): Über die Prinzipien (Anfänge, Elemente) der Geometrie. Über die Ruhe der Erde oder ihre Bewegung. Über die Ursache der Altweiberkälte (*bard aijâm el-'aǧûz*). — Die im Art. 218 zuletzt (p. 100) genannte Abhandlung „über die Regel de tri" (*fî râšikât el-hind*) ist im Verzeichnis seiner Werke erwähnt.

Zu Art. 219: In seinem Hauptwerk: *Liber completus in iudiciis astrorum* zitiert ABENRAGEL zwei andere eigene Schriften, welche nicht mehr

---

1) Wie dies gemeint ist, verstehe ich nicht recht; wenn diese Gelehrten seine Schüler gewesen wären, so wäre die Sache verständlich, gerade der erstgenannte aber war EL-BIRÛNÎS Lehrer; er vergleicht diese Arbeiten im Gegensatz zu den eigenen (die er seine Kinder nennt) mit Adoptivkindern; wahrscheinlich wurden diese Arbeiten von den Betreffenden in seinem Auftrag oder auf seine Einladung hin verfaſst.

2) Was die zwei letzten Abhandlungen anbetrifft, so vergl. Art. 186, es heiſst daselbst, sie seien an EL-BIRÛNÎ gerichtet gewesen, statt in seinem Auftrag oder auf seinen Wunsch verfaſst worden.

vorhanden zu sein scheinen: 1) *Liber signalium seu notarum;* 2) *Tabulae solvendi nodos et exponendi adspectus,* beide astrologischen Inhaltes (vergl. STEINSCHNEIDER, *Vite di matem. arab. di* B. BALDI, *con note,* p. 78 des „Estratto" v. J. 1873. — Das eben genannte Werk ABENRAGELS wurde von SALOMO DAVIN (B. DAVID?) ins Hebräische übersetzt, und existiert in Oxford (Reg. 12), Paris (1067) und Wien (187); ebenso von ISAAK ABŪ'L-CHAIR B. SAMUEL, in Oxford (URI 452); drittens von einem Anonymus, im Vatican (382). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 578—80). — Von dem Stammesnamen EL-ŠEIBÂNÎ kommt wahrscheinlich der Zuname *el cano,* den ABENRAGEL in den *Libros del saber* (vergl. STEINSCHNEIDER, l. c. p. 75) trägt, indem die spanischen Übersetzer *el-šeibânî* von *šeib* = Greisenalter, Greis sein, grau sein, ableiteten, und deshalb durch *el cano* (= der Graue) übersetzten. (NALLINO.) Nach DOZY, *Suppl. aux dict. arab.* I, 808 heißt *el-šeibânî* selbst bei einigen Autoren *le grison, homme à cheveux gris.*

Zu Art. 255: Die spanische Übersetzung des Buches über die *Ṣafîḥa* befindet sich in den *Libros del saber* (Vol. III, p. 149—237); eine hebräische Übersetzung (vielleicht von JAKOB B. MACHIR existiert in Oxford (URI 440), München (36), Paris (1021, 1030, 1031, 1047) etc. (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 590—94.) — In demselben Bande, p. 272—284 befindet sich auch die Übersetzung einer Abhandlung des ZARQÂLÎ, betitelt: *de cuemo puede ell'ome fazer una lámina* (= *ṣafîḥa,* Scheibe) *para todas las planetas* (im Index heißt sie: *del trazado de una escala propia para construir una lámina universal que sirva para todos los planetas*); die Apogeen der Planeten sind darin für das Jahr 473 (1080/81) berechnet. (NALLINO.) — Zu Note d) p. 110: Diese lateinische Übersetzung ist vorhanden in Paris (7195, 9°).

Zu Art. 256: Statt „*Firah*" ist zu lesen „*Fijerroh*", vom spanischen „fierro" = „hierro" = Eisen; IBN CHALLIKÂN I, 423, Übers. II, 501 liest „*Firroh*". (NALLINO.)

Zu Art. 272: ABŪ'L-ṢALTS Schrift „über das Astrolabium" ist auch arabisch in hebräischer Schrift vorhanden in Paris (Hebr. 1101), nach STEINSCHNEIDER, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 47, 1893, p. 364.

Zu Art. 276: Die Abhandlung *el-tabṣira* des CHARAQÎ befindet sich auch in Florenz (Laurenz. 293, jetzt 89) nach F. LASINIO, *Ricordi presi da cod. orient. della bibl. Med.-Laur. di Firenze,* in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 26, 1872, p. 806f. (NALLINO.) — Die Abhandlung *muntahâ el-idrâk* existiert auch in Florenz (Pal. 290) nicht ganz vollständig; es ist dies nicht, wie ASSEMANI angegeben, die *nihâjet el-idrâk* des

MAḤMÛD EL-ŠÎRÂZÎ (s. Art. 387; es ist also hier die Angabe „Florenz (Pal. 290) unvollständig" zu streichen). (NALLINO.) — In Note c) ist nach „Oxford" einzuschalten: „und Florenz".

Zu Art. 284: ĞÂBIR B. AFLAḤ's „Astronomie" existiert auch in hebräischer Übersetzung durch MOSES B. TIBBON in Oxford (Bodl. Opp. Add. 17, NEUB. 2011), und in einer zweiten des JAKOB B. MACHIR, verbessert von SAMUEL B. JEHUDA, in Paris (1014, 1024, 1025, 1036), nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 544.

Zu Art. 292: Statt „Halbinsel *Šuqar*" lies „*ǧezîrat šuqar*". (NALLINO.)

Zu Art. 300, Note d): Nach „Moṣul" ist hinzuzufügen: „das heutige Eskî Moṣul." (NALLINO).

Zu Art. 315: Die hebräische Übersetzung des Auszuges aus dem Almagest von IBN ROŠD befindet sich außer in Paris (903) noch ibid. (696 u. 1018), ebenso in Berlin (Cat. v. STEINSCHNEIDER 1197 fol.), München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 31), Wien (175), Oxford (Bodl. Mich. 45, Opp. Add. fol. 17) etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 546—547.

Zu Art. 320: Bei den Fundorten der *Arǧûza* ist noch hinzuzufügen: Konstant. (2761, 2°).

Zu Art. 325: Die hebräische Übersetzung der „Astronomie" des BEṬRÛĞÎ befindet sich in München (Cat. STEINSCHNEIDER 150), Paris (1288), Oxford (Bodl. Mich. 386) etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 550—51.

Zu Art. 327: MOSES B. MEIMÛN schrieb 1158 eine kleine Abhandlung in arab. Sprache über den jüdischen Kalender; sie befindet sich in hebr. Übersetzung in Paris (1058 u. 1061). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 599.)

Zu Art. 334: Statt EL-SALAMÎ ist zu lesen EL-SOLAMÎ, d. h. der zum Stamme SOLEIM gehörende. (CARRA DE VAUX.)

Zu Art. 336: Statt MUḤABB ED-DÎN ist zu lesen MUḤIBB ED-DÎN. (NALLINO.)

Zu Art. 341: Das Werk *Šems el-maʿârif* etc. ist lithographisch herausgegeben worden in Kairo, 1291 (1874), und Bombay 1296 u. 1298 (1879 u. 1881). (NALLINO.)

Zu Art. 343: Der Name „EL-MELIK EL-FÂ'IZ", zu dem ich ein (?) gesetzt habe, ist richtig (vergl. IBN CHALLIKÂN I. 60, Übers. I. 168 u. II. 50, Übers. III. 240 u. 41); daher fällt p. 137 die Note a) weg.

Zu Art. 345: Dieser THEODQRUS von Antiochia ist sehr wahrscheinlich der bei LEONARDO von Pisa (*Scritti*, II. p. 247—252; CANTOR, *Vorl.* II¹, p. 45) genannte Meister THEODOR; die Aufgaben, deren Lösung er von LEONARDO verlangte (vergl. CANTOR, ibid. p. 42 u. 45—47), hatte er jedenfalls von seinem Lehrer KEMÂL ED-DÎN B. JÛNIS (s. Art. 354).

Zu Art. 349 u. Anmerkung 72: Die *nihâjet el-idrâk* des MUH. B. ABÎ BEKR EL-FÂRISÎ befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (NALLINO.) — Die *maʿârîǧ* (nicht *maʿârîǧ*, wie das Ms. von Kairo hat) existiert auch arabisch in hebräischer Schrift in Berlin (Hebr. 682 Qu.) und im Brit. Mus. (Hebr. 4104), nach STEINSCHNEIDER, Zeitschrift d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 355 u. 56. Nach den Auszügen, die STEINSCHNEIDER hier aus dieser Schrift giebt, kann dieselbe nicht wohl vor 634 Jezd. = 1266 n. Chr. verfaſst worden sein; also sind die nach den Kairenser Mss. der *nihâjet* und nach HAĞÎ CHALFA von mir gemachten Zeitangaben 606 u. 629 d. H. nicht richtig, diese fehlerhaften Zahlen können leicht aus 665 u. 669 (1267 u. 1270/71) entstanden sein, welche besser stimmen würden; es fällt somit auch meine in Anmerkung 72 gemachte Vermutung weg, der Fürst, dem beide genannten Werke gewidmet sind, sei nicht der MELIK EL-MOẒAFFAR JÛSUF B. ʿOMAR, der Fürst von Jemen, sondern der MELIK EL-MOẒAFFAR B. EL-MELIK EL-MANṢÛR, Herr von Ḥamât.

Zu Art. 358: Der Globus des QAIṢAR B. ABÎ'L-QÂSIM existierte 1809 noch in der Sammlung des Kardinals BORGIA zu Velletri; er ist beschrieben worden von S. ASSEMANI (*Globus coelestis cufico-arabicus Veliterni Musei Borgiani*, Patavii 1790). Ob dies der ursprüngliche i. J. 622 (1225) konstruierte Globus, oder ein nachgemachtes Exemplar sei, können wir nicht entscheiden. (Vergl. L. IDELER, *Untersuch. über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809, p. LVIII.)

Zu Art. 366: Hier ist vielleicht der Plural „*el-ḥossâb*“ (die Rechner) der Singularform „*el-ḥassâb*“ vorzuziehen; dasselbe gilt auch für das gleiche Wort in Art. 464, und für „*el-noẓẓâr*“ (die Beobachtenden) statt „*el-naẓẓâr*“ in Art. 444 (p. 182) u. 468. (NALLINO.)

Zu Art. 368: NAṢÎR ED-DÎNS Werk Nr. 1 (*el-taḏkira*) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 187), unvollständig, dagegen ist der Fundort „Florenz (Pal. 277)“ zu streichen, hier befindet sich bloſs die Rezension der Elemente EUKLIDS (vergl. p. 151, wo Z. 16 v. o. das „vielleicht“ zu streichen ist); ebenso ist es vorhanden im Vatican (319); Hr. NALLINO, dem ich diese Angaben verdanke, fand auch im Kommentar des QÂḌÎZÂDEH zur *Taḏkira* des NAṢÎR ED-DÎN (Ms. 311 der Bibl. Laur. zu Florenz, fol. 39v.) eine Stelle, aus der sich ergiebt, daſs die *Taḏkira* in zwei Ausgaben erschienen ist. Die persische Übersetzung dieses Werkes (betitelt: *risâle-i moʿînîje*) befindet sich auch in Konstant. (2670, 1° u. 4844), und ebenda (4853, 23° u. 2670, 2°) ein Kommentar dazu von ungenanntem Verfasser. — Nr. 2 (*risâle-i bîst bâb*) existiert auch in Konstant. (2624, 1° u. 2701, 3°); ein anonymer Kommentar dazu ist in Florenz,

Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 29,4⁰ = ASSEMANI 318), es ist also p. 149, Z. 16 v. o. die Angabe „Florenz (Pal. 318)" in diesem Sinne zu verbessern. — Nr. 3 (*kitâb-i sî faṣl*) ist ebenfalls in Konstant. (2617,2⁰, 2621,2⁰ u. 2701,2⁰), ebenso im Vatican (nach HORN, *Aus italien. Biblioth.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **51**, 1897, p. 30, Nr. 70), und auch in Florenz, Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 26 u. 27 = ASSEMANI 295 u. 310); am letzteren Orte (*Cat. d'Italia*, Nr. 29,1⁰ = ASSEMANI 318) befindet sich auch der Kommentar zu diesem Werke von BEDR EL-ṬABARÎ; alle genannten Mss. persisch. — Nr. 4 (die Ilchânischen Tafeln) ist auch vorhanden im Vatican (nach HORN, *Aus italien. Biblioth.*, l. c. p. 15, Nr. 31), ebenso in Konstant. (3605), an beiden Orten persisch. — Nr. 12 (*zubdet el-hei'a*) befindet sich auch in Konstant. (2670,3⁰). — Als weitere Schrift NAṢÎR ED-DÎNS ist noch anzuführen: 19. *Nuzhet el-naẓîr* (sollte wohl heifsen: *nâẓir*) = die Unterhaltung des Betrachtenden, über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Konstant. (2621,3⁰). — Von seinen Bearbeitungen (Rezensionen) befindet sich diejenige des Almagestes auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 188). — Der Sohn des p. 147 als Mitarbeiter NAṢÎR ED-DÎNS genannten MU'JID ED-DÎN EL-'ORḌÎ, MUH. B. MU'JID ED-DÎN EL-'ORḌÎ, hat einen Himmelsglobus konstruiert, der sich noch (ob im Original oder als Kopie ist unentschieden) in dem mathematischen Salon zu Dresden befindet; er wurde beschrieben von G. W. S. BEIGEL (Astronom. Jahrbuch v. BODE u. ENCKE, 1808, p. 97ff.); als Jahr der Konstruktion ist angegeben 688 (1289). (Vergl. auch L. IDELER, *Untersuch. über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809, p. LIX.)

Zu Art. 369: Das Zitat zu BROCKELMANN mufs heifsen I, 474 statt II, 474. (NALLINO.)

Zu Art. 375: Das syrische Werk des BAR-HEBRÄUS „das Aufsteigen des Geistes etc." ist jetzt gedruckt: *Le livre de l'ascension de l'esprit sur la forme du ciel et de la terre*, publié par F. NAU; I. Partie: texte syriaque, Paris 1899 (Bibliothèque de l'école des hautes études, fasc. **121**); II. Partie: traduction française, Paris 1900 (ibid. fasc. **121**$_2$) (NALLINO.)

Zu Art. 376: „Zeitrechnung der Chinesen (?) und Uiguren"; das Fragezeichen ist zu streichen, *el-chiṭâ'* bedeutet wirklich die Chinesen (vergl. auch *Prolégom. des tables astron. d'*OLOUG BEG, publié par L. A. SÉDILLOT, Texte pers. p. 30—53, Trad. p. 32—61). (NALLINO.)

Zu Art. 382: Die „Fundamentalsätze" des ŠEMS ED-DÎN EL-SAMARQANDÎ befinden sich auch in Konstant. (2712,1⁰).

Zu Art. 387: Über *nihâjet el-idrâk* des QOṬB ED-DÎN EL-ŠÎRÂZÎ vergl.: „Zu Art. 276." — Die *durret el-tâǧ* (Encyklopädie) befindet sich auch persisch in Florenz, Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 28 = ASSEMANI 315), unvoll-

ständig, nur das 2. Kapitel des IV. Teils enthaltend, und in Konstant. (2405). — Die *ichtijârât-i moẓaffarî* handeln nicht über „Tagewählerei", wie ich p. 159 nach dem arabischen Sprachgebrauch übersetzt habe, sondern sind ein in persischer Sprache verfaſstes Kompendium seines Werkes *nihâjet el-idrâk*; *ichtijârât-i moẓaffarî* ist also hier zu übersetzen mit „die dem MOẒAFFAR gewidmeten Auszüge oder Auswahlen"; dieselben befinden sich auch in St. Petersb. Inst. P. (Nr. 124), V. ROSEN giebt in seinem Katalog (p. 300—317) davon eine längere Beschreibung. (NALLINO.) — Nach HORN (*Pers. Handschr. in Konstant.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 54, 1900, p. 319, Nr. 440) machte EL-ŠÎRÂZÎ auch eine persische Übersetzung der Rezension der Elemente des EUKLIDES durch NAṢÎR ED-DÎN, dieselbe befindet sich in der Bibliothek der *jeñi ǧâmi'* (Nr. 796.)

Zu Art. 394: Nach ERSCH und GRUBER, Encyklop. II. Ser. 31. Bd. p. 57 soll 'OMAR B. EL-MELIK EL-MOẒAFFAR JÛSUF nach einer Regierung von 20 Monaten i. J. 696 (1296/97) gestorben sein (der Artikel ist von STEINSCHNEIDER verfaſst, es fehlt die Quellenangabe für dieses Datum).

Zu Art. 395: Der Kommentar zur *tadkira* des NAṢÎR ED-DÎN von NÎSÂBÛRÎ ist auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph) vorhanden. (NALLINO.)

Zu Art. 397 u. Anmerkung 80: Es ist vielleicht das in Konstant. (2694) sich befindende persische Werk, betitelt: *zîǰ šems el-munaǰǰim* (= Tafeln des ŠEMS (ED-DÎN) des Astronomen), identisch mit dem ins Griechische übersetzten astronomischen Werke des ŠEMS ED-DÎN EL-BOCHÂRÎ, allerdings wird im Katalog von Konstant. als genauerer Name des Verfassers der *zîǰ* angegeben: MUH. B. 'ALÎ CHÔǦA ŠEMS EL-MUNAǦǦIM. — Der Kommentar zur *hidâjet el-hikme* des AṬÎR ED-DÎN EL-ABAHRÎ befindet sich im Ind. Off. (493, 584, 2^0 u. 592, 2^0). — In Anmerkung 80, p. 220 ist die Jahreszahl 1320 zu verbessern in 1300.

Zu Art. 403: Der *Mulachchaṣ* des ǦAǦMÎNÎ befindet sich auch in Konstant. (2592), in persischer Übersetzung des MUH. B. 'OMAR ASDÂFÂNÎ (?).

Zu Art. 416: Die „Astronomischen Tafeln" des IBN EL-ŠÂṬIR sind auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 189) vorhanden, ebenda (Nr. 190, 1^0) befindet sich auch eine Abhandlung desselben Autors über das von ihm erfundene „umfassende Instrument", betitelt: *el-aṧi'a el-lâmi'a fî'l-'amal bi'l-âla el-ǧâmi'a* (die glänzenden Strahlen, über den Gebrauch des umfassenden Instrumentes).

Zu Art. 421: Die Schrift *el-durr el-manṯûr* kommt auch in Turin (64, 13^0) vor.

Zu Art. 422: Der Kommentar zur *Arǰûza* des ʿALÎ B. ABÎ'L-RIĞÂL von AḤMED B. EL-QONFÛD ist wahrscheinlich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph), der Name des Kommentators ist allerdings nicht angegeben. (NALLINO.)

Zu Art. 423: Die *rasâ'il* des IBN EL-HÂ'IM befindet sich auch in Florenz (Laur. 317), nach *Cat. d'Italia*, p. 293; es ist dies also nicht die Abhandlung über die Rechenkunst von ABÛ MANṢÛR EL-ṬÛSÎ, wie S. ASSEMANI angegeben hat, vergl. Art. 507; wie es sich mit der in diesem Art. genannten Abhandlung über die Algebra verhält, die ebenfalls von ABÛ MANṢÛR EL-ṬÛSÎ sein soll, weifs ich nicht. (NALLINO.)

Zu Art. 430: Die Lebensbeschreibung des EUKLIDES von QÂḌÎZÂDEH, die sich in Florenz (Pal. 280) befinden soll, ist wahrscheinlich nichts anderes als die biographische Notiz über EUKLIDES, die sich im Kommentar zu den „Fundamentalsätzen" des SAMARQANDÎ (s. Art. 382) von QÂḌÎZÂDEH befindet, und von ḤAĞÎ CHALFA (I. p. 380ff.) und anderen zitiert worden ist. (Vergl. auch HEIBERG, *Litterargesch. Studien über Euklid*, p. 1ff.) — Der Kommentar des QÂḌÎZÂDEH zum *Mulachchaṣ* des ĞAGMÎNÎ befindet sich auch in Bologna (Bibl. dell' Univers.: ROSEN, *Remarques sur les mss. orient. de la collect. Marsigli à Bologne*; Roma, Accad. dei Lincei, Memorie 12_3, 1884, Nr. 423). (NALLINO.)

Zu Art. 432: Das Werk Nr. 1 (*iršâd el-ḥâ'ir*) des IBN EL-MEĞDÎ ist auch vorhanden in Konstant. (2673,3°). — Nr. 13 (*cholâṣat el-aqwâl*) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 190,2°). — Zu Note a): Die „Einleitung in die Astrologie" des ʿALÎ B. AḤMED EL-BALCHÎ kommt auch in Konstant. (2702) vor; hier hat der Verfasser noch die Kunje „ABÛ'L-QÂSIM."

Zu Art. 433: Die Schrift *miftâḥ-i kunûz* des CHALÎL B. IBRÂHÎM befindet sich auch in Paris (Pers. Nr. 168.)

Zu Art. 437: ʿIZZ ED-DÎN EL-WEFÂ'Î schrieb zwei verschiedene Werke über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, das eine betitelt *el-nuǧûm el-zâhirât* (dies ist das von mir angeführte, die Angaben von Kairo sind zu verbessern in 276, 304 u. 325); das andere betitelt *qoṭb* (auch *qoṭf*) *el-zâhirât*, in Kairo (267) und Turin (64,8°); das Ms. Kairo (260) ist identisch mit Berlin (5851), wo es dem SIBṬ EL-MÂRIDÎNÎ zugeschrieben wird; überhaupt mögen öfters Verwechselungen zwischen diesen Werken ʿIZZ ED-DÎNS und den fast gleichbetitelten des MÂRIDÎNÎ vorgekommen sein (s. Art. 445, Nr. 7 u. 8). — Bei der Abhandlung *nuzhet el-nazar* ist nach Leiden (1125) zu ergänzen: Berlin (5824). — Am Schlusse sind noch folgende zwei Werke dieses Autors hinzuzufügen: *nazm el-ʿoqûd fî ʿamal el-sâʿât ʿalâ'l-ʿamûd* (die Ordnung (der Perlen) der Halsbänder, über den

Gebrauch der Stunden (oder Zeiten) auf der Säule (?)), in Kairo (296). *Fâ'ide fî ḥisâb el-munḥarafât* (Nutzanwendung über die Berechnung der Abweichungen (d. i. der Richtungen der Qible vom Meridian)), in Gotha (1381,3°). (Nach BROCKELMANN, *Gesch. d. arab. Litteratur*, II, 129.)

Zu Art. 438: Die *Muḥammedîje* EL-QÛŠĞÎS befindet sich auch in Konstant. (2733,2°), arabisch; die *Fatḥîje* ebenda (2733,1°), arabisch. — Die Tafeln ULÛĞ BEGS mit den „Prolegomena" existieren auch in St. Petersb. Inst. P. (Nr. 125.)

Zu Art. 443: JÛSUF B. CHIḌRBEGS Biographie giebt auch ṬÂŠKÖPRIZÂDEH I, p. 194, und zwar etwas anders und ausführlicher als HAMMER; so war er vor seinem Wezirat schon Lehrer in Adrianopel, fiel als Wezir MUḤAMMEDS II. bei ihm in Ungnade, wurde aber von seinem Nachfolger BÂJEZÎD II. wieder zu Ehren gezogen und zuerst zum Lehrer an der Medrise in Adrianopel, dann zum Statthalter von Gallipoli ernannt; als Todesjahr wird ebenfalls 891 (1486) genannt.

Zu Art. 444: EL-QALAṢÂDÎS Werk Nr. 3 (*kašf el-asrâr* etc.) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 193), und ebenso in Florenz Biblioth. nazion. (*Cat. d'Italia*, p. 292, Nr. 79.) Für diese Schrift ist auch zu verweisen auf ENESTRÖM, *Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée* par ALKALSADI, in der Biblioth. Mathem. 1886, p. 236—39. (NALLINO.) — In Note b) p. 181 sind die Worte: „Also nicht EL-FAḌL B. ḤÂTIM EL-NAIRÎZÎ, wie WÜSTENFELD ..... vermutet hat" zu streichen. — P. 182, Z. 5 v. o. soll es heifsen: 1315 (1897/98) statt 1310 (1892/93). (NALLINO.) — Das Werk Nr. 9 (das Ganze der Erbteilung und Kommentar dazu) ist wahrscheinlich vorhanden in Madrid (340).

Zu Art. 445: SIBṬ EL-MÂRIDÎNÎS Schrift Nr. 1 (*risâle fi'l-'amal bi'l-rub' el-mujaijib*) befindet sich auch in Turin (64,4°) und in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph); diese Abhandlung wurde gedruckt in Kairo 1309 (1891/92), am Rande von *el-ǧewâhir el-naqîje fi'l-a'mâl el-ǧaibîje* (die feinen Juwelen, über die Sinusoperationen) des AḤMED EL-CHAṬÎB EL-ĞÂWÎ. (NALLINO.) — Zu der Schrift Nr. 2 (*raqâ'iq el-ḥaqâ'iq*) ist zu bemerken: Aus dem Pariser Ms. 2541 veröffentlichte WOEPCKE den Anfang dieser Abhandlung in französischer Übersetzung (*Mémoire sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident*, p. 54, 66 ff.), ebenso CARRA DE VAUX eine Stelle über periodische Sexagesimalbrüche und die Siebner- und Achterprobe bei solchen (Biblioth. Mathem. 13, 1899, p. 33—36). — Nr. 10 (Dritte Abhandlung über den Muqanṭarâtquadranten) befindet sich auch in Madrid (231,1°). — Nr. 12 (*kifâjet el-qanû'*) ist auch vorhanden in Beirût (l. c.) (NALLINO.)

Zu Art. 447 u. 453: *El-qabbân* ist nicht die gewöhnliche gleicharmige

Wage, sondern die ungleicharmige Schnellwage, wie auch *el-qarasṭûn* (Art. 66, p. 37, und Art. 43, p. 20—21). (NALLINO.)

Zu Art. 454: *El-durr el-naẓîm*, mit Tafeln aus den ULÛĠ BEG'schen ausgezogen, befindet sich auch in Paris (2496,2°), wahrscheinlich nur die Tafeln.

Zu Art. 456: BARĠENDÎS Abhandlung *risâle-i hei'at* ist sehr wahrscheinlich ein Kommentar zur *tadkira* des NAṢÎR ED-DÎN (vergl. *Diction. of the t'chn. terms*, by SPRENGER etc.; Art. *chaṭṭ nişf el-nahâr*).

Zu Art. 457: Als weitere Schrift MÎRAM ČELEBÎS ist noch anzuführen: *risâle fî ahkâm el-ṭâli'* (Abhandlung über die Urteile nach dem Aszendenten), persisch vorhanden in Berlin P. (339).

Zu Art. 460: Statt *afaqîje* ist zu lesen *âfâqîje*.

Zu Art. 469: Das Kartenwerk des 'ALÎ B. AḤMED EL-ŠARQÎ soll blofs ein Steuermannsbuch sein, es verzeichnet nur die Meeresküsten und die Häfen an denselben. (NALLINO.)

Zu Art. 470: Der Kommentar zum Sinusquadranten des SIBṬ EL-MÂRIDÎNÎ von AḤMED B. AḤMED B. 'ABDELḤAQQ EL-SUNBÂṬÎ befindet sich auch in Turin (64,3°).

Zu Art. 471: *Fî 'ilm el-binkâmât* habe ich einfach mit „über die Uhrmacherkunst" übersetzt; *binkâmât* sind aber insbesondere Wasser- und Sanduhren. (NALLINO.)

Zu Art. 478: Von 'OMAR B. MUḤ. EL-FÂRISKÛRÎ befindet sich auch eine Biographie bei EL-MUḤIBBÎ (*cholâṣat el-aṯar fî a'jân el-qarn el-hâdî 'aśar* = Auszug der Denkwürdigkeiten über die Vornehmen (Gelehrten) des 11. Jahrh. d. H.), Kairo 1284 (1867/68), Vol. III. p. 221—23, wo als Todestag der 17. Šauwâl d. J. 1018 (Januar 1610) und als Todesort Damiette angegeben ist. (NALLINO.)

Zu Art. 479: *Ǧedâwil ichtilâf manẓar el-qamar* etc. ist zu übersetzen: Tafeln der Parallaxe des Mondes in Länge und Breite, d. h. der Wirkung der Mond-Parallaxe auf die scheinbare Stellung des Mondes in Bezug auf Länge und Breite. Auch von diesem Autor ('ABDELQÂDIR EL-FAIJÛMÎ) hat EL-MUḤIBBÎ (l. c. II. 456—57) eine Biographie. (NALLINO.)

Zu Art. 480: Nach NALLINO ist nicht *'Âmilî* die richtige Lesart, sondern *'Âmulî*, von *'Âmul*, einer Stadt in Syrien, die nicht zu verwechseln ist mit *Âmul* in Persien. Eine längere Biographie BEHÂ ED-DÎNS befindet sich auch bei EL-MUḤIBBÎ (l. c. III. 440—50); hier werden aufser den von mir angeführten Schriften noch genannt: *el-mulachchaṣ fî'l-hei'a* (Kompendium der Astronomie); *el-risâle el-hilâlîje* (die Abhandlung über die Neumonde). (NALLINO.) — Nach dem *kitâb iktifâ' el-qanû' bi-mâ huwa maṭbû'* (= das Buch der Genügsamkeit des sich mit dem was gedruckt

ist Zufriedengebenden) von E. Van Dyk, Kairo 1896, p. 241, wurde auch die Schrift *taṣrîḥ el-aflâk* lithographiert herausgegeben in Luknow (Jahreszahl fehlt) mit Kommentaren.

Zu Art. 495: Das Ms. 1489 in Gotha wurde eingehend besprochen von H. Suter in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 12—40.

Zu Art. 501ª: Ich finde nachträglich, daſs bei Ibn Jûnis (Notices et extr. des mss. VII, p. 168) ein Saʿîd b. Chafîf el-Samarqandî erwähnt ist, der eine Beobachtung von Abû'l-Qâsim b. Amâǧûr zitiert; dieser Saʿîd muſs also zwischen 900 und 1000 n. Chr. gelebt haben; ich hatte ihn unter die Autoren des 14. Jahrh. versetzt, weil das Pariser Ms. 2506 nach de Slane aus diesem Jahrhundert stammen und eine Autographie sein soll, doch wird dies bloſs als eine Vermutung hingestellt.

Zu Art. 507: Vergl. „Zu Art. 423.“

Zu Art. 508: Nallino hält Sarrâǧ für die richtige Lesart, nicht Sirâǧ.

Zu Art. 512: Der Kommentar zum Sinusquadranten des Sibṭ el-Mâridînî von ʿAbderraḥmân b. Muh. el-Tâǧûrî befindet sich auch in Turin (64,12⁰).

Zu Art. 517: Ich habe hier die Vermutung ausgesprochen, daſs Muh. b. Muh. el-Baġdâdî identisch sein könnte mit dem Bearbeiter des Euklidischen Buches „über die Teilung der Flächen“, mit Muhammed Bagdadinus; ich füge noch weiter hinzu, daſs Ibn el-Qiftî (bei Casiri I, 342) als Kommentator des 10. Buches des Euklides einen Abû Muh. b. ʿAbdelbâqî el-Baġdâdî nennt, der in seinem Kommentar Zahlenbeispiele zu den Sätzen jenes Buches gegeben habe; Ibn el-Qiftî besaſs ein vom Verfasser selbst geschriebenes Ms. dieses Kommentars.

Zu Art. 528: Schriften über den gleichen Gegenstand (Finger- oder Handrechnen) verfaſsten auch Šems ed-dîn Abû ʿAbdallâh Muh. b. Aḥmed el-Mauṣilî (d. h. v. Moṣul), arabisch in Gedichtform, und Šaraf ed-dîn ʿAlî Jezdî, persisch; die erstere wurde nebst einem ähnlichen Traktat eines Spaniers Juan Perez de Moya übersetzt von A. Marre im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 1, 1868, p. 309—318, der arabische Text befindet sich im Pariser Ms. 4441, das einen sog. Führer für Sekretäre, die Elemente der Arithmetik, Geometrie, Feldmeſskunde, des Steuerwesens etc. umfassend, enthält, und i. J. 979 (1571/72) geschrieben worden ist; es giebt ganz kurz die Darstellung der Einer, Zehner, Hunderter u. s. f. bis auf Zehntausend durch die Finger beider Hände; die zweite persische Abhandlung wurde mehrfach herausgegeben und übersetzt, zuletzt von St. Guyard im Journal asiat. 18_6, 1871, p. 106 ff.

Zu Anmerkung 5ª: Vergl. „Zu Art. 19.“

Zu Anmerkung 6: Über diese arabische Gradmessung vergl. auch NALLINO, *Il valore metrico del grado di meridiano secondo i geografi arabi*, Firenze, Torino, Roma 1893: Estratto dal Cosmos di GUIDO CORA **11**, 1892—93, fasc. I.—IV. — Der Ort *Wamia* (der eine Endpunkt der Mâmûnischen Gradmessung) ist schwerlich *Apamea*, sondern wahrscheinlich *Wâsiṭ* bei *Raqqa*. Statt BAḤTARÎ ist eher zu lesen BOḤTORÎ (vergl. die eben genannte Abhandlung p. 13, 18 u. 19).

Zu Anmerkung 8: Hier ist Zeile 4 v. o. zu lesen 857/58, statt 857/60.

Zu Anmerkung 30: Vergl. „Zu Art. 138."

Zu Anmerkung 43: Die spanische Übersetzung der Abhandlung ʿALÎ B. CHALAFS befindet sich gedruckt in den *Libros del saber de astronomia* (Madrid 1863—67), Vol. III, p. 11—132: *De cuemo se deue obrar con la lámina* (= *ṣafîḥa*) *universal.* (NALLINO.)

Zu Anmerkung 46: Das Zitat zu STEINSCHNEIDER (*Vite di matem. arabi di* B. BALDI etc., p. 76) bezieht sich auf den „Estratto" (aus dem Bullett. di bibliogr. d. sc. matem.) vom Jahre 1873 in 108 Seiten; es giebt aber noch einen andern vom Jahre 1874 in 100 Seiten; mir war nur der erste bekannt, deshalb ist mir auch die Korrektur AMARIS, betreffend die Prophezeiung über die Dauer der Regierungszeit des Emirs von Sicilien, AḤMED B. EL-ḤASAN B. ABÎ'L-ḤOSEIN entgangen. (NALLINO.)

Zu Anmerkung 60: Hier ist p. 217, Z. 4 v. o. zu lesen *mašjacha* nicht *mašîcha.* (NALLINO.)

Zu Anmerkung 68: Der lateinische Text der von MUNK zitierten Stelle befindet sich in der Venediger Ausgabe der Astronomie des ALPETRAGIUS v. J. 1531, fol. 4^{r}. (NALLINO.)

Zu Anmerkung 80: Vergl. „Zu Art. 397."

P. 237, nach Z. 27 v. o. ist einzuschalten: ʿALÎ B. SAHL S. ABÛ'L-ḤASAN ʿALÎ B. SAHL.

P. 251, Z. 21 v. o. ist zu lesen 17 statt 16.

P. 257, Z. 18 v. u. ist zu streichen: ʿOMAR B. MUḤ. B. CHÂLID.

Als neue Artikel sind einzuschalten:

373^{a}. ZAKARÎJÂ B. MUḤ. B. MAḤMÛD, ABÛ JAḤJÂ (auch ABÛ MUḤ. und ABÛ ʿABDALLÂH) EL-QAZWÎNÎ, aus Qazwîn in Persien gebürtig, ein gelehrter Imâm und Jurist, daneben auch bewandert in Geographie, Naturgeschichte und Astronomie, Schüler von AṬÎR ED-DÎN EL-ABAHRÎ (s. Art. 364); er war auch Qâḍî von Wâsiṭ und Ḥilla, und starb im Muḥarrem 682 (April 1283). (SILV. DE SACY, *Chréstom. arabe*, 1. Edit. T. III, p. 505). Ich nenne ihn hier nur, weil er in seinem Werke, betitelt: *kitâb ʿaǧâ'ib el-machlûqât* etc. (das Buch der Wunder der Schöpfung etc.) eine Beschreibung der Sternbilder und der Mondstationen gegeben hat, die von

L. IDELER arabisch mit deutscher Übersetzung und reichhaltigem Kommentar herausgegeben worden ist: *Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809; das ganze Buch wurde arabisch herausgegeben von F. WÜSTENFELD: ZAKARIJA B. MUH. B. MAHMUD EL-CAZWINIS Kosmographie. Erster Teil: *kitâb 'aǧâ'ib el-machlûqât*, die Wunder der Schöpfung. Göttingen, 1849. (Zweiter Teil: *kitâb âṯâr el-bilâd*, die Denkmäler der Länder. Göttingen, 1848); den ersten Teil bis auf p. 208 der Textausgabe veröffentlichte auch in deutscher Übersetzung H. ETHÉ, 1868; p. 208—245 ebenfalls in deutscher Übersetzung J. RUSKA: *Das Steinbuch aus der Kosmographie des ZAKARIJA B. MUHAMMED, übersetzt und mit Anmerkungen versehen*, (Beilage zum Jahresber. 1895/96 der prov. Oberrealschule Heidelberg.) Das Werk EL-QAZWÎNÎS (I. Teil) existiert noch arabisch in drei von einander verschiedenen Ausgaben und zwar: in Berlin (6161 u. 62, unter letzter Nummer in zwei unvollständigen Exempl.); Gotha (1. Ausg. 1503—05; 2. Ausg. 1506 u. 07; 3. Ausg. 1508); Wien (1435—37); in pers. Übers. betitelt *tuḥfet el-ǧarâ'ib* (Geschenk der Seltenheiten) ibid. (1438 u. 39), hier heifst der Verfasser auch noch EL-KAMÛNÎ (?); in türk. Übers. von EIJÛB B. CHALÎL, vollendet 977 (1570) in Magnesia und gewidmet dem Sultan MURÂD III., ibid. (1440); Paris (2173—78, Teile davon 2179 u. 80 und 2918,11°, Kompendien des Werkes von ungenannten Verfassern [vielleicht 1. Ausg.?] 2182 u. 83, 2419,3°); pers. ibid. (Nr. 141 u. 142); Leiden (726, arab. und pers.); Oxford (I, 460 u. 890, II, 267); Brit. Mus. P. (Or. 373, 1371, 1621; Addend. 5603, 7706, 16738—40, 23564), das Ms. 1621 übersetzt i. J. 954 (1547) für IBRÂHÎM 'ÀDIL ŠÂH; Ind. Off. (723—25); München (463—66); Florenz (Laur. 107); Konstant. (2935—39); Kaíro (85); u. a. a. O. Eine pers. Übers. erschien lithographiert in Lucknow, 1283 (1866/67), eine andere in Teherân 1264 (1848).

433ᵃ. 'ABDELĠANÎ B. ḤOSÂM ED-DÎN AḤMED, bekannt unter dem Namen IBN EL-'ARABÂNÎ (?) EL-MIṢRÎ, lebte wahrscheinlich in Agypten und starb 854 (1450). (Vergl. Cat. v. Algier, p. 428 und BROCKELMANN, *Gesch. d. arab. Litt.* II, 128). Er schrieb: *Ġarâ'ib el-funûn we mulaḥ el-'uǧûn* (Seltenheiten der Wissenschaften und Ergötzlichkeiten der Augen), eine elementare Astronomie, in Algier (1554), unvollständig.

466ᵃ. 'ABDERRAḤMÂN B. MUH. EL-ACHḌARÎ schrieb i. J. 939 (1532/33) im Alter von 20 Jahren eine *Arǧûza*, betitelt *el-sirâǧ fî 'ilm el-falak* (die Leuchte zur Wissenschaft der Sphäre), noch vorhanden in Algier (1451) mit Kommentar von einem Ungenannten; sie wurde veröffentlicht mit dem Kommentar des SAḤNÛN B. 'OṮMÂN B. SOLEIMÂN B. AḤMED B. ABÎ BEKR EL-MEIDAWÎ EL-WÂNŠARÎŠÎ (d. h. aus Wânšarîš, franz. Ouarsenis, in Algier), in Kairo 1314 (1896/97). (NALLINO.) — Ebenso schrieb er eine *Arǧûza*

über Arithmetik und Erbteilung, betitelt *el-durra el-baiḍâ' fî aḥsan el-funûn we'l-aŝjâ'* (die glänzende Perle über die schönste (beste) der Disziplinen und Gegenstände), in Algier (399,6°), nur der Teil über die Arithmetik. (Vergl. auch Ḥaǧî Chalfa III, 200, wo der Verfasser nur genannt ist ʿAbderraḥmân el-Maġrebî.)

474ᵃ. Jaḥjâ b. Muh. b. Muh. b. ʿAbderraḥmân el-Ḥaṭṭâb (der Holzhauer oder Holzhändler) el-Roʿainî el-Mekkî (d. h. aus Mekka), gestorben wahrscheinlich gegen das Jahr 1000 (1591/92)[1]), schrieb: *Wasîlat el-ṭullâb* (Der Weg der Studierenden) zur Kenntnis der Verrichtungen des Tages und der Nacht auf dem Wege der Rechnung, abgekürzt aus der Abhandlung seines Vaters „Ausrechnung der Tag- und Nachtzeiten, hauptsächlich zu Gebetszwecken", in Berlin (5700). Die Abhandlung des Vaters ist wahrscheinlich noch vorhanden in Beirût (Bibl. der kathol. Univers St. Joseph): *Risâle fî maʿrifet istichrâǧ auqât el-ṣalât* (Abhandlung über die Kenntnis der Auffindung der Gebetszeiten), von Muh. b. Muh. b ʿAbderraḥmân b. Ḥasan el-Ḥaṭṭâb el-Roʿainî el-Mâlikî; das Ms wurde i. J. 931 (1524/25) abgeschrieben. (Nallino.) — Ferner schrieb er: *Fî maʿrifet istichrâǧ aʿmâl el-leil we'l-nahâr* etc. (Über die Kenntnis der Auffindung der Verrichtungen des Tages und der Nacht mit den Sinusquadranten, in Berlin (5826); *Mochtaṣar fî ʿilm el-ḥisâb*, Auszug aus der *nuzhet el-ḥossâb* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Berlin (5983).[2])

479ᵃ. ʿAlî b. Welî b. Ḥamza, aus dem Westen stammend, schrieb i. J. 999 (1590/91) in Mekka ein arithmetisches Werk, betitelt: *tuḥfet el aʿdâd li-ḏawî el-rošd we'l-sadâd* (das Geschenk der Zahlen für die Vernunft und richtige Einsicht Besitzenden), in welchem abgekürzte Bezeichnungen für die Unbekannte und ihre Potenzen, für die Operationszeichen etc. vorkommen, und zwar noch in etwas ausgedehnterem Maſse als bei el-Qalaṣâdî. Ein Ms. dieses Werkes erwarb der Gelehrte Ṣâliḥ Zeki Efendî auf dem groſsen Bazar in Konstantinopel i. J. 1888. Derselbe Gelehrte (vgl. seinen Artikel: *Notation algébrique chez les Orientaux*, in Journal asiatique 11_9, 1898, fand kürzlich in der Bibliothek Muṣṭafas III in Konstantinopel eine Algebra eines unbekannten Autors, verfaſst i. J. 834 (1430/31), also sehr wahrscheinlich vor dem *kašf el-asrâr* des Qalaṣâdî in welcher diese abgekürzte Bezeichnungsweise noch viel weiter durchgeführt ist. Man vergleiche für Näheres die für die Geschichte der Algebra sehr interessante Abhandlung im Journal asiatique.

---

1) Ahlwardt hat im Berliner Kat. drei verschiedene Angaben: Nr. 5700 „c. 1000" Nr. 5826 „gegen das Jahr 1060 am Leben", Nr. 5983 „gest. nach 993."

2) Hier hat der Verfasser noch den Ehrennamen Šaraf ed-dîn.

487ᵃ. ʿABDELḤAQQ EL-ĠÂFIQÎ EL-IŠBÎLÎ, Abû MUH., bekannt unter dem Namen IBN EL-HÂ'IM, wahrscheinlich in Sevilla lebend, verfafste astronomisch-chronologische Tafeln, betitelt: *el-zîǧ el-kâmil* (die vollkommenen Tafeln), oder: *el-kâmil fî'l-taʿâlîm* (das Vollkommene für die Belehrungen), noch vorhanden in Oxford (II, 285), in welchem er die Fehler der Tafeln des IBN-EL-KEMÂD (s. Art. 487) zu verbessern versucht hat. — HAĞÎ CHALFA III, 569 nennt ihn Abû'L-Ḥasan B. ʿABDELḤAQQ EL-ʿÂNIQÎ (sic!), bekannt unter dem Namen IBN EL-HÂ'IM EL-IŠBÎLÎ. Er führt ferner an, dafs der gröfste Teil der Tafeln *el-moqtabas* (wahrscheinlich andere spätere als die gleichbenannten des IBN EL-KEMÂD) dem oben genannten Werke des IBN EL-HÂ'IM entnommen sei. Es wäre sehr zu wünschen, dafs das Oxforder Ms. einmal etwas gründlicher untersucht würde.

Einteilung.

Seite

Einleitung. Hinweis auf Arnaulds mathematische Leistungen und die ihm gebührende Stellung in der Geschichte der Mathematik 189

I. Arnaulds Leben, sein philosophischer Standpunkt, seine Beziehungen zu den grofsen Zeitgenossen, deren Urteil über seine mathematischen Qualitäten 190

a) Arnaulds Stellung zu Descartes und zum Cartesianismus 192

b) Sein Zusammenarbeiten mit Blaise Pascal in Port royal; der Kreis der Marquise de Sablé. Ausblick auf die mathematische Seite von Arnaulds Verkehr mit Pascal, die bisher unbeachtet geblieben ist . . 197

c) Arnaulds Beziehungen zu Leibniz 200

d) Sein antagonistisches Verhalten gegen Malebranche und den Occasionalismus 212

II. Besprechung von Arnaulds mathematischen Arbeiten und deren Bedeutung 218

a) Seine Thesen und die Logik von 1662 218

b) Arnaulds Mathematisches Hauptwerk, die „Nouveaux Elemens de Géométrie" von 1667, Pascals Anregung, die Wichtigkeit dieses Buches und seine Nachwirkungen, Bibliographie und Inhaltsauszüge 235

c) Die Quadrati magico-magici angeregt durch Pascal 302

Schlufs. Arnauld der Euklid des XVII. Jahrhunderts 335

Litteraturangabe 336

Einleitung.

Die Geschichtsschreibung der Mathematik ist in den letzten Jahrzehnten zu einem himmelanstrebenden Bau geworden. In vorliegender Arbeit wollen wir versuchen, ihn mit einem neuen Standbilde zu schmücken und einem Manne den Platz anzuweisen, der ihm im Rahmen eines glänzenden Jahrhunderts mathematischer Forschung gebührt. Dieser Mann ist Antoine Arnauld, der grofse Arnauld.

Ermutigt werden wir zu unserm Unternehmen durch die Worte dessen, der jenen stolzen Bau geschaffen: Moritz Cantor schliefst das Vorwort zur zweiten Auflage seiner monumentalen *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"* Bd. I mit dem Wunsche: *„dafs abermals neue und immer neue Mitarbeiter das Feld umzugraben und zu bebauen sich finden mögen. Noch ist es bei weitem nicht erschöpft, noch lohnt auf ihm die Arbeit."*

In Cantors genanntem Werke wird Antoine Arnauld Bd. III S. 367 im Verlaufe der Darstellung einer Kontroverse zwischen Leibniz und Guido Grandi über die Ordnungen des Unendlichkleinen erwähnt. Das Bewufstsein, dafs Antoine Arnauld ein grofser Mathematiker gewesen, ist der Litteratur nie ganz verloren gegangen. Wir finden z. B. in E. G. Guhrauers Leibnizbiographie Arnauld als Mathematiker bezeichnet. Aber worauf sich dieser Ruf gründet, ist heute fast ganz vergessen, was Arnauld auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften geschrieben, verschollen. Nicht nur bei seinen Landsleuten Bossut und Chasles wird Arnauld überhaupt nicht genannt, sondern auch Poggendorffs *„Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften"* versagt vollständig. Vergeblich wird man den Namen Arnauld suchen. Man ist versucht, auf die Leistungen dieses Mannes innerhalb der exakten Wissenschaften das Wort anzuwenden, das einst Menage, der französische Varro des siebzehnten Jahrhunderts, wie man ihn wohl nennt, an der Spitze eines Epigramms im Jahre 1679 in räumlichem Sinne von Arnauld aussprach: *„Abditus in tenebris notus qui toto in orbe."* Diese Vergessenheit ist um so unverdienter, als Arnauld an zahlreichen und verschiedenen Gegenständen der Mathematik sein Interesse bethätigt hat. Auf dem Gebiete der Philosophie der Mathematik und ihrer Methoden begegnen wir ihm als Schriftsteller; an

zahlentheoretischen Problemen hat er seinen Scharfsinn versucht; in der Behandlung der Grundlagen der Geometrie hat sein Auftreten sogar Epoche gemacht; wir werden zeigen, dafs er der Mittelpunkt geworden ist, nach welchem gewisse Richtungen konvergieren, die durch diesen Mittelpunkt erst gewürdigt werden können und durch ihn ihren festen historischen Zusammenhang erhalten. Abgesehen von seinen originellen Gedanken hat er sehr zur Erläuterung und Verbreitung neuer und wichtiger Gesichtspunkte beigetragen.

Alle diese Verdienste Arnaulds rechtfertigen unsere Absicht, in einer Monographie sein Verhältnis zu den mathematischen Fragen, welche seine Zeit bewegten, und seine Arbeit auf diesem Boden eingehend und erschöpfend zu behandeln. Haben doch alle die grofsen Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, gerade auch jene, welche Frankreich die Hegemonie in der Mathematik bis zum Auftreten von Leibniz und Newton sicherten, in Einzeluntersuchungen ihre sorgfältige, ja liebevolle Erforschung gefunden. Wir denken hier an Descartes, an die Arbeiten Poudras über Desargues, C. Henrys über Mydorge, Paul Tannerys über Fermat, an den Aufsatz M. Cantors in den *Preufsischen Jahrbüchern* XXX 212—237 *„Blaise Pascal“*, endlich an Lehmanns Programmabhandlung über De la Hire.

Bevor wir aber die inhaltliche Würdigung von Arnaulds speziell mathematischen Schriften in Angriff nehmen, haben wir sein Leben kurz zu skizzieren, seinen philosophischen Standpunkt zu kennzeichnen und seine Beziehungen zu den grofsen Zeitgenossen etwas ausführlicher darzulegen, um ein Gesamtbild der Leistungen dieses vielseitigen Geistes zu erhalten.

Erstes Kapitel.

Arnaulds Leben, sein philosophischer Standpunkt und seine Beziehungen zu den grofsen Zeitgenossen.

Antoine Arnaulds Leben fällt zum gröfsten Teile in das goldene Zeitalter seiner Nation unter Ludwig XIV. Er selbst ist eine der hervorragenden Individualitäten, welchen es die französische Geschichte zu verdanken hat, dafs sie jenen Zeitabschnitt nicht nur auf politischem, sondern auch auf religiösem und litterarischem Gebiete als einen grofsartigen bezeichnen darf. Den Namen *„der grofse Arnauld“* hat er sich durch seine theologischen Kämpfe sowohl, wie durch seine hervorragende Teilnahme an den philosophischen Bewegungen und am Geistesleben seiner Zeit überhaupt

erworben. Geboren am 6. Februar 1612 zu Paris als Sohn Antoine Arnaulds, eines Rechsgelehrten und Generalprokurators der Königin Katharina von Medici, erhielt er seine wissenschaftliche Vorbildung am Kollegium Calvi-Sorbonne, einen propädeutisch-philosophischen Kursus absolvierte er an der Anstalt von Lisieux. Im Jahre 1635—36 sehen wir ihn als Baccalaureus (*bachelier*) der Pariser Universität. Wegen seiner hervorragenden Begabung erhielt er bald die Erlaubnis, sein Domizil in der Sorbonne aufzuschlagen (*hospes sorbonicus*). Den Grad eines Doktors der Sorbonne erlangte er nach feierlicher, öffentlicher Verteidigung seiner Thesen im Jahre 1641. Eine solche Disputation war ein glänzendes Ereignis im Leben der Universität; wenn die Anzahl der bacheliers, die daran teilzunehmen hatten, grofs war, nahm die Feierlichkeit durch die sich rasch folgenden Einwürfe und Verteidigungsgründe der Gegner oft einen sehr lebhaften Charakter an und hielt die sich Messenden fortwährend in Atem.

Durch die Gegenwart der höchsten Beamten des Staates und der ersten Diener der Kirche, sowie hervorragender Gelehrten erhielt der Akt seine Weihe. Arnauld verteidigte in überaus glänzender Weise seine Thesen; er überraschte die Anwesenden *usque ad stuporem*. Seine thatsächliche Aufnahme in die Gemeinschaft und die Rechte der Sorbonne erfolgte aber erst 1643 (*socius sorbonicus*), da eine der Vorbedingungen eine philosophische Vorlesung war, welche Arnauld in der Folge am Kollegium von Mans hielt. Zu seinen Schülern daselbst gehörte auch Pierre Barbay, später Professor der Pariser Universität, der sich durch einen *Commentaire latin sur toute la Philosophie d'Aristote,* Paris 1680, 6 vols in 12^0 bekannt machte. Die Vorlesungen, die dieser Mann hielt, und die damals grofsen Beifall fanden, waren gröfstenteils eine Reproduktion der früher bei Arnauld gehörten. Die Doktoren der Sorbonne wollten Arnauld zwar von seiner praktisch-pädagogischen Verpflichtung dispensieren, aber der Kardinal Richelieu setzte jenem Versuche sein Veto entgegen, wiewohl er Arnauld gewogen war; bei seinem letzten Besuche in der Sorbonne kurz vor seinem Tode hatte der Kardinal Arnauld in seinem Studierzimmer aufgesucht und ihn zu dem Erfolg seiner Studien beglückwünscht. Schon in diese frühe Zeit fällt der Anstofs, welcher für Arnaulds ganze Richtung ausschlaggebend war. Du Verger, der berühmte Abt von Saint-Cyran, hatte Arnauld der Theologie zugeführt und ihm die Schriften des hl. Augustinus empfohlen. So war es kein Wunder, dafs der junge Theologe sich mächtig zu den Lehren des Jansenius hingezogen fühlte, als 1640 dessen „*Augustinus*" erschien. Aber mit diesem Hinneigen zum Augustinismus war auch unvermeidlich der Kampf gegen die diametral entgegengesetzte Denk- und Handlungsweise verknüpft: der Kampf gegen den Jesuitismus, ein Kampf, den

Arnauld mit seinem berühmten Buche *„de la frequente communion"* eröffnete und der sich durch sein ganzes Leben hinziehen sollte. Man möchte glauben, dafs unser Arnauld die Abneigung gegen den Orden des Ignatius v. Loyola von seinem Vater überkommen habe, der sich durch eine im Jahre 1594 vor dem Parlament im Namen der Universität gegen die Jesuiten gehaltene Klagerede einen Namen gemacht hatte. Im Jahre 1644 begann Arnauld für Jansenius zu schreiben. Die Jesuiten hatten es unterdessen dahin gebracht, dafs Arnauld nach Rom zitiert wurde, aber Parlament und Sorbonne widersetzten sich dieser Zitation, die nach den Landesgesetzen nicht zulässig sei. Damit wurde die Sache des feurigen Verteidigers seiner Überzeugung eine öffentliche und er selbst zum Wortführer und Haupte der Jansenisten, jener Partei, welche in Frankreich eine Reformation innerhalb der Kirche erstrebte. Wir bemerken nur noch, dafs Arnauld im Verlaufe der Streitigkeiten 1656 von der Sorbonne ausgeschlossen wurde, weil seine Ansicht gegen das Unfehlbarkeitsdogma zu verstofsen schien; mit ihm wurden die siebzig Doktoren ausgeschlossen, welche für den Beschuldigten gestimmt hatten. Für die genauere Kenntnis dieser Kämpfe verweisen wir auf Kuno Fischers eingehende Darstellung Bd. I S. 138 seiner *„Geschichte der neueren Philosophie"*.

Was uns aber in dieser frühen Periode seines Lebens besonders interessiert, das ist

Arnaulds Stellung zu Descartes und zum Cartesianismus.

Descartes' *„Meditationes de prima philosophia"* erschienen im Jahre 1641. Schon 1637 hatte er sein erstes Werk veröffentlicht: *Discours de la méthode, la Dioptrique, les Météores et la Géométrie.* Die drei letzteren Abhandlungen, von denen die *„Géométrie"* als Grundlegung der analytischen Geometrie und der Lehre von den Gleichungen in der Geschichte der Mathematik eine so hervorragende Stellung einnimmt, waren Probiersteine für seine Methode, wie der *„Discours de la méthode"* von dem ganzen System eine Probe geben sollte. Er wird thatsächlich als die Logik desselben betrachtet. Schon hier waren die Hauptfragen der *„Meditationen"*: Gott und das Verhältnis des Geistes zum Körper behandelt, aber, wie der Philosoph selbst in der Vorrede des Werkes sagte, nur im Vorübergehen, um aus dem Urteil darüber zu erfahren, ob er seine Gedanken später in eingehender Begründung veröffentlichen solle. Diese Aufgabe erfüllten die *„Meditationen"*. Descartes hat darin alle Grundbegriffe seiner Metaphysik und seiner Physik vereinigt. Die Hauptfrucht seiner wissenschaftlichen Mufse in Holland schätzte Descartes selbst sie unter allen seinen Werken am höchsten. Getreu

dem Worte des Horaz *„nonumque prematur in annum"* hatte er zehn Jahre in einer der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechenden Weise daran vervollkommnet und ihnen die ganze Vollendung aufgeprägt, die er zu geben verstand. Gleichwohl befürchtete er, dafs die Neuheit seiner Methode und die überraschenden Ausblicke darin, dann auch die Feinheit der Gedankengänge zu stark wirken könne, und so entschlofs er sich, dieses Werk zuerst in lateinischer Sprache zu veröffentlichen. Aber noch nicht genug damit, wollte er eine ganz kleine Anzahl von Exemplaren drucken lassen, um sie vor der eigentlichen Publikation an die feinsinnigsten Philosophen und Metaphysiker zu versenden und deren Urteil zu hören. Es war nicht seine Absicht an seiner Arbeit etwas zu ändern, da dies den Gang und die Kraft seiner Darstellung zu sehr beeinträchtigt hätte, sondern er wollte die Einwürfe zusammen mit seinen Erwiderungen darauf seinem Werke nachdrucken lassen, damit es schon kritisiert vor das gelehrte Publikum hinträte. Da er es dann aber wieder nicht für angemessen hielt, jene beabsichtigte kleine Auflage in Holland drucken zu lassen, sandte er eine Kopie des Manuskripts an seinen Freund, den Pater Mersenne, nach Paris; er fügte bei 1) die Einwürfe, die ihm schon der Gelehrte Carterus oder Caterus aus Alkmaar gemacht hatte, da dieser Teil als Vorbild für künftige Beurteiler dienen und Wiederholungen vermeiden sollte, 2) eine Widmung an die Doktoren der Sorbonne und 3) einen kurzen Abrifs von sechs Meditationen, welchen er auf Bitten Mersennes verfafst hatte, um die Prüfung seiner Schrift zu erleichtern. Descartes legte seinem Freunde ans Herz, sein Manuskript nur Leuten in die Hände zu geben, die befähigt, nicht von Schulvorurteilen befangen, deren Triebfeder nicht Neid und Eifersucht, sondern Liebe zur Wahrheit und der Ruhm Gottes bei der Beurteilung wäre; er wollte, kurz gesagt, ein verständnisvolles und objektives Urteil haben. Für Mersenne war es nicht leicht, die geeigneten Persönlichkeiten zu finden, keiner wollte ihm sein Urteil schriftlich geben. Mersenne war also genötigt, selbst zu Papier zu bringen, was er von Philosophen und Theologen, die er befragt hatte, von deren Ansicht mündlich hörte. Descartes antwortete darauf und legte seiner Antwort eine erläuternde Schrift bei: *„Raisons pour prouver l'existance de Dieu et la distinction qui est entre l'esprit et le corps humain disposée d'une manière géométrique."*

Bald darauf sandte Mersenne die drei Einwürfe an Descartes, die der englische Philosoph Hobbes, der damals in Paris lebte, verfafst hatte, und machte ihm Hoffnung auf solche von Mitgliedern der Sorbonne; aber aufser einem jungen Doktor, welcher einst mit viel Vergnügen Descartes' *„Essais de la méthode"* gelesen hatte, fand sich niemand, der Mersennes Verlangen erfüllen und sich zu einem Urteil über die *„Meditationen"* des

damals schon berühmt werdenden Philosophen aufschwingen wollte. Es war dies unser Arnauld. Er war damals achtundzwanzig Jahre alt und Descartes hätte sich fast wieder über die Jugend seines Gegners getäuscht, wie es ihm trotz seines Scharfblickes einst mit dem Verfasser des *„Traité des coniques"* ergangen war, als ihm der jugendliche Pascal seine Arbeit übersandte. In dem Briefe an Mersenne, welcher seinen Einwürfen vorgedruckt ist, legt Arnauld mit grofser Bescheidenheit, aber ebenso feiner Durchdringung des Stoffes dar, was ihm bei der Lektüre der *„Meditationen"* als angreifbar erschienen war:

Zunächst bemerkt er, dafs Descartes für die Existenz und Natur der menschlichen Seele denselben Beweisgang eingeschlagen habe, wie der hl. Augustin. Er macht über denselben Gegenstand noch weitere Bemerkungen, aber mehr um ihn zu stützen und zu durchleuchten, als um ihm Schwierigkeiten zu bereiten. Endlich gesteht er unumwunden zu, dafs der kurze Abrifs der sechs *„Meditationen"*, von dem wir oben sprachen, aufser dem Lichte, welches er auf die ganze Arbeit fallen liefse, gerade in obiger Frage zur Hebung der Schwierigkeiten diejenigen Gründe enthalte, welche sich auch ihm aufgedrängt hätten. Weniger gefällt ihm die Art, wie Descartes die Verschiedenheit des Geistes vom Körper abgeleitet hatte. Was ohne die Idee eines andern Dinges klar und deutlich gedacht werden könne, existiere auch ohne das letztere und vollständig unabhängig von ihm, so hatte Descartes gelehrt. Arnauld findet diesen Schlufs nicht ganz richtig. Er führt dagegen geometrische Beispiele ins Feld; man könne sich ein rechtwinkliges Dreieck vorstellen, ohne den pythagoräischen Satz zu kennen; während letzterer doch geradezu als Definition zu Grunde gelegt werden könne. Man könne sich ferner eine Dimension ohne die andere denken, während sie in Wirklichkeit doch immer alle drei zusammen vorkämen. Descartes müsse auch seinen methodischen Zweifel noch klarer stellen, damit ihm seine Absichten nicht mifsdeutet würden, und wo er vom Irrtum handle, sei das intellektuelle und das moralische Element scharf zu trennen. Wir dürfen auch hier wieder auf Kuno Fischer verweisen (l. c. S. 407). Baillet erzählt in seinem *„Leben Descartes'"*, dafs Arnaulds Einwürfe dem Philosophen als die ernstesten erschienen; noch nie habe er einen geschickteren und gerechteren Gegner gehabt als diesen jungen Gelehrten, welcher aufser tiefem Wissen in seinen Gedankengängen eine *mathematische Schärfe und Reinlichkeit* zeige. In diesem Sinne schrieb Descartes an Mersenne. Auch von der milden und achtungsvollen Weise, in der er seine Bemerkungen vorgetragen hatte, war Descartes sehr angenehm berührt. In seiner Antwort ging dieser nur auf den ersten Punkt sehr eingehend ein; hinsichtlich des zweiten antwortete er ausweichend:

„je tâcherai plutôt d'éviter les coups que de m'opposer directement à leur violence imitant ceux qui ont à faire à un trop fort adversaire." Descartes hätte gewünscht, dafs Arnauld noch vor dem Drucke seine gesamte Antwort erhalten hätte, aber Mersenne konnte dies nicht ermöglichen; in dem Briefe an Voetius vom 13. Dezember 1642 erzählt ersterer, dafs er bei dem Verfasser der vier Einwürfe (Arnauld) angefragt habe, ob jener noch etwas zu erwidern habe. Er habe die Antwort bekommen, dafs derselbe vollkommen von Descartes' Entgegnung befriedigt sei; ja dafs er in einer philosophischen Vorlesung, welche er zwei Jahre zuvor zu halten gehabt, ganz ähnliche Prinzipien vertreten und vor feierlicher Versammlung verteidigt habe. Offenbar sind damit Arnaulds Thesen gemeint, von denen wir später noch zu reden haben werden. Durch die Anerkennung, welche Arnauld im übrigen seiner Metaphysik zollte, fühlte sich Descartes sehr geschmeichelt, ein Beweis, wie hoch er Arnauld stellte; in einem Briefe vom Februar 1642 schreibt er an die Brüder vom Oratorium: *J'ai beaucoup de satisfaction de ce que ce sont les plus grands hommes et les meilleurs esprits qui goutent et favorisent mes opinions, . . . et bien qu'il n'y ait pas longtemps que M. Arnauld soit docteur, je ne laisse pas d'estimer plus son jugement que celui d'une moitié des anciens."* Gerne hätte er mit dem ihm sehr sympathischen Manne korrespondiert, aber Arnauld war um diese Zeit schon zu sehr in seine theologischen Kämpfe verwickelt. Nie hörte der Philosoph auf, Arnauld zu schätzen, wie folgende Briefstelle beweist, die er drei Jahre später an Abbé Picot schrieb: *„La disgrâce de M. Arnauld me touche d'avantage que les miennes; car je le compte au nombre de ceux qui me veulent du bien et je crains au contraire que ses ennemis ne soient aussi pour la plupart les miens."* Auch Arnauld war Descartes stets ergeben, und als letzterer im Jahre 1643 nach Paris kam, liefs er ihm durch einen seiner Schüler Grüfse überbringen und ihm seine Dienste anbieten. Aber noch einmal kamen die beiden grofsen Männer in Berührung. Als im Sommer 1648 Descartes seine letzte Reise nach Paris machte, erhielt er, wie Baillet erzählt, am 15. Juli einen Brief, worin ein gelehrter Mann, ohne sich zu erkennen zu geben, ihm verschiedene schwierige Punkte bezüglich seiner Lehre vom Vacuum, der Seele und der Existenz Gottes zur weiteren Aufklärung unterbreitete. Descartes ersah aus Inhalt und Stil des Briefes, dafs er es mit einem tiefen Denker und ihm wohlgesinnten Manne zu thun habe; es wurde bei ihm dadurch der Wunsch rege, den Unbekannten kennen zu lernen und sich seiner Unterhaltung zu erfreuen. Er schrieb ihm, jener möge eine Zusammenkunft veranstalten: *„car on peut âgir plus sûrment par lettres avec ceux qui aiment la dispute, mais pour ceux qui ne cherchent que la vérité l'entrevue et la vive voix sont beaucoup*

plus commodes." Descartes hatte auch in Paris mit Roberval schlimme Erfahrungen gemacht; ihn zählte er zu den Leuten „*qui aiment la dispute*". Dieser Mathematiker hatte als hartnäckiger und bösartiger Gegner seiner Physik den grofsen Philosophen in Paris unaufhörlich verfolgt und sich keine Gelegenheit entgehen lassen, um ihm in barschem Tone zuzusetzen oder ihn zu hänseln, und dies hatte nicht zum wenigsten die baldige Abreise Descartes aus Paris veranlafst.[1]) Jener Unbekannte schien ihm sympathischer zu sein. Die Unterredung aber kam nicht zustande, da jener sein Incognito nicht verlassen wollte. Am 29. Juli sandte ihm Descartes seine Antwort, geschmeichelt, dafs es sogar bedeutende Anhänger seiner Philosophie gäbe, die er nicht einmal mit Namen kenne. Wir wissen heute, dafs jene Persönlichkeit Arnauld war, wie er in den Bemerkungen selbst erzählt, die sich von seiner Hand in einem Exemplare von Baillets „*Vie de Descartes*" finden.

Auch nach Descartes' Tode blieb Arnauld der Cartesianischen Philosophie treu; er machte sie oft zum Gegenstand seiner Unterhaltung, so besonders als er auf dem Schlosse des Herzogs von Luynes zu Besuch weilte, der selbst ein solcher Bewunderer der „*Meditationen*" war, dafs er sie, wie bekannt, ins Lateinische übersetzte. Auch ein wissenschaftliches Gespräch mit dem Herzog von Liancourt über denselben Gegenstand hat sich erhalten (*Mémoires de M. Fontaine* Tom. II pag. 52). Am besten kennzeichnen wohl Kuno Fischers Worte Arnaulds Stellung zum Cartesianismus: „*Bei der Verbindung, die später zwischen der Cartesianischen Philosophie und den Jansenisten von Port royal stattfand, darf Arnauld als Mittelglied und Führer gelten.*" Diese Verbindung zweier mächtiger Geistesfaktoren zog Arnauld viele Streitschriften zu; auch aus dem Lager seiner eigenen Partei. Unter den Gegnern des Cartesianismus waren besonders leidenschaftlich De la Ville und Le Moine; gegen letzteren schrieb Arnauld unter dem Namen Davy, den er später in Holland führte. Bitter empfand es sein Gerechtigkeitsgefühl, als Descartes' „*Meditationen*" auf den römischen Index gesetzt wurden (Dekret vom 20. Nov. 1663); während die Gegenschrift Gassendis, der sich mit aller Macht bemühte, gerade die im vollen Einklang mit der Kirche befindlichen Prinzipien zu vernichten, oder die „*Censura philosophiae Cartesianae*" des Materialisten Huet völlig unbehelligt geblieben seien. Mit Recht müsse man, um konsequent zu sein, dann auch Sylvain Regis' Gegenschrift gegen Huet, welche 1691 unter dem Titel „*Réponse au Livre qui a pour titre: P. Dan. Huetii Suesson.*

1) Über das Verhältnis Descartes' und Robervals siehe auch Leibniz „*Remarques sur l'abrégé de la Vie de M. Descartes*" in der Ausgabe von Foucher de Careil.

episc. designat. Censura Philosophiae Cartesianae" der Zensur unterwerfen. Arnauld erwähnt bei dieser Gelegenheit in seinem Briefe XCIV. der Gesamtausgabe jenes seltene Schriftchen Descartes' gegen Regius *„Notae in programma quoddam"*, und dafs es mit dem Zusatz *„donec corrigatur"* auf den Index gesetzt gewesen sei. Wichtiger als alle diese Einzelheiten ist wohl, dafs Arnauld in einem Lehrbuche der Logik, auf das wir noch in dem speziell mathematischen Teile unserer Arbeit ausführlich zu sprechen kommen werden, zur Erläuterung und Verbreitung der Cartesianischen Lehre wesentlich beitrug; Windelband nennt es in seiner zweibändigen *„Geschichte der neueren Philosophie"* S. 191 Bd. I *„den vollkommensten Ausdruck der durch das cartesianische System bestimmten Methodologie"*.

Seit 1648 weilte Arnauld zurückgezogen von der Welt in Port royal des Champes in Paris. *„In dem Asyle dieses ländlichen Klosters finden sich in gleicher religiöser Lebensrichtung und anachoretischer Art eine Reihe bedeutender Männer zusammen, darunter wissenschaftliche und theologische Gröfsen, welche die Verteidigung des Jansenismus übernehmen und als eine geistesmächtige, kirchlich-religiöse Partei auftreten"*, so charakterisiert Kuno Fischer die *„Herren von Port royal"*. Hier lernt Arnauld Blaise Pascal[1]) kennen. Nach dem bekannten Wagenunfalle auf der Brücke von Neuilly, der ihm beinahe das Leben gekostet hätte, hatte Pascal sich mehr und mehr in religionsphilosophische Betrachtungen versenkt, welche ihn mächtig zu den Einsiedlern von Port royal hinzogen. In herzlichster Weise von jenen aufgenommen, machte er in Port royal öfter mehrmonatliche Besuche, ohne sich zunächst fest dort niederzulassen. Zu derselben Zeit beschäftigte sich die Sorbonne mit den Anklagen, welche Arnauld durch sein Auftreten für Jansenius sich zugezogen. Arnauld sah sich genötigt, eine Apologie zu verfassen. Als er sie aber seinen Freunden vorlas, fand man, dafs sein Stil für diesen Zweck zu lehrhaft, zu ernst sei. Arnauld konnte eine glänzende Beredsamkeit entwickeln, aber er wurde zu leicht durch sein allzu leidenschaftliches Temperament fortgerissen. Hier aber galt es einen weitern Kreis für seine Sache zu interessieren und die Leute der Feder auf seine Seite zu ziehen. Arnauld selbst war sich darüber klar, dafs hier durch eine anziehende und gefällige Form der Darstellung der Leserkreis sich gefangen sehen mufste, ehe er sich dessen noch bewufst war. Pascal war gerade anwesend. *„Pourquoi vous qui êtes jeune ne prendriez-vous pas la plûme?"* sagte Arnauld zu ihm. Gerne war Pascal bereit, seinen

1) Für das Leben Pascals sind zu vergleichen M. Cantor, *„Blaise Pascal"*, *Preufsische Jahrbücher* XXX S. 217—237, sowie Dreydorff, *Pascal, sein Leben und seine Kämpfe*, 1870 und Nourrisson, *Pascal, Physicien et Philosophe* Paris 1888.

Freunden einen Dienst zu erweisen; er machte den Versuch, und mit Benützung des von Arnauld gelieferten Materials entstanden so die *„Provinzialbriefe"*, jenes heute noch unübertroffene Denkmal polemischer Litteratur. Mit kaustischem Witze, mit Beweisen, deren zwingender Gewalt sich niemand entziehen konnte, enthüllten die achtzehn Briefe schonungslos die Schwächen der Gegner und gaben sie dem Fluche der Lächerlichkeit preis, als Arnaulds Richter, die zum gröfsten Teile aus Bettelmönchen bestanden, seine Ausschliefsung aus der Sorbonne durchgesetzt hatten.

Wie die beiden grofsen Männer im Kampfe für geistige Freiheit zueinanderstanden, so sehen wir sie auch in friedlichem Wetteifer die Wissenschaften pflegen. Die Lehre Descartes' hatte sich mächtig Bahn gebrochen und viel dazu beigetragen, philosophische Gespräche und Unterhaltungen populär zu machen. Die vornehme Welt und die Frauen hatten gelehrte Bildung aufgenommen und trugen sie gerne zur Schau. Vielleicht den lebhaftesten Ausdruck fand diese Strömung in einem geistreichen Zirkel, der sich in Port royal bildete. Dort versammelte Frau von Sablé an den Sonnabenden eine Elite hochgebildeter Männer und Frauen um sich. Seit 1659 wohnte die Marquise in der Nähe von Port royal, um sich dem Zuge der Zeit folgend einem kontemplativen Leben zu widmen; aber auch hier in dem stillen Kloster wurde ihr Salon der Sammelplatz der schöngeistigen Aristokratie, und selbst Mitglieder der königlichen Familie, die Herzöge und Herzoginnen von Chevreuse und Longueville, der Maréchal de Luxembourg, der Kardinal d'Estrée, de Choiseul, La Rochefoucauld, nicht zu vergessen De Méré, dessen Name ja auch in gewisser Beziehung zur Geschichte der Mathematik steht (vgl. M. Cantor, Bd. III S. 355 und bei Nourrisson das Kapitel: *„Pascal et le Chevalier de Méré"*), verkehrten daselbst. In dieser glänzenden Gesellschaft erschienen Arnauld, Pascal und Nicole. Man plauderte in jenem leichten, weltmännischen Tone, welcher den Geist Montaignes atmete, von philosophischen Gegenständen, von Pädagogik, kurz von allen geistigen Interessen. Madame de Sablé war die Seele dieser Zusammenkünfte; ihr Biograph Cousin schildert uns, wie sie auf allen Gebieten des Wissens zu Hause war. Ein neues Genre der Litteratur, die *„Pensées"* und *„Maximes"* wurde von ihr ins Leben gerufen. Mit Arnauld korrespondierte sie über dessen *„Logik"*; sie scheute selbst die schwierigen Probleme der *„Wissenschaft von der Wissenschaft"* nicht. Die *„Grammaire raisonnée"* Arnaulds legte sie ihren Freunden von der Akademie vor. Die betreffenden Briefe haben sich erhalten (Cousin, *Madame de Sablé,* Paris 1859; S. 369—373). Unter ihnen ist besonders interessant ein mit *„De Labrosse"* unterzeichneter, worin ein Mann dieses Namens Frau von Sablé ersucht, auf Arnauld dahin zu

wirken, dafs er die Grundlehren der Physik in einem Lehrbuche behandeln und vereinigen möge, da es dringend zu wünschen sei, dafs mit den alten Schulvorurteilen in dieser Wissenschaft aufgeräumt werde, indem nur die wenigsten Leser mit genügenden Vorkenntnissen an die Lektüre von Descartes' dahin gehörenden Schriften heranträten. Also auch in der Physik wäre Arnauld in der Lage gewesen zu schreiben, wie jener De Labrosse bezeugt: *„c'est une chose qu'il a déjà assez meditée et sur laquelle il a fait toutes les reflexions possibles. Il ne lui reste qu'à les mettre en ordre et à les donner au public."* Wir haben hier den Kreis der Marquise de Sablé etwas ausführlicher behandelt. *Denn hier war, wie wir mit höchster Wahrscheinlichkeit vermuten dürfen, der Boden, auf welchem Pascal und Arnauld auch im Gebiete der mathematischen Wissenschaften ihre Gedanken tauschten; eine Thatsache, die bisher in der ganzen modernen französischen Pascallitteratur unbeachtet geblieben ist. Dieser Gedankenaustausch veranlafste die Herausgabe von Arnaulds geometrischem Buch und ist der wichtigste Punkt unserer vorliegenden Arbeit.* Wir werden später das Nähere berichten. —

Die Veröffentlichung der Schriften, welche als Originalleistungen Arnauld für immer einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Wissenschaften sichern, fällt in das Jahrzehnt von 1660—1670; den Reigen eröffnete seine *„Grammaire générale et raisonnée"* im Jahre 1660. Die Entstehung dieses Buches erläutert eine Stelle eines seltenen Werkchens *„Matanasiana ou Mémoires littéraires, historiques et critiques du docteur Matanasius"* à la Haye chez la Vve de Charles Le Viev 1740 in 12^0^ Tom. I p. 133, es heifst daselbst: *„Au-reste il n'est pas étonnant que cette Grammaire générale et raisonnée soit un excellent Ouvrage, puis que c'est un de ceux qu'on nomme de Port-Royal. C'est une production de ce docteur fameux que M. Gravina* (ibid. p. 135) *reconnoit pour le flambeau de toutes les sciences et de tous les excellens préceptes: Scientiarum optimorumque institutorum omnium fax; et de ce savant Bénédictin que M. Ménage † appelle un homme d'une grande vertu et d'un grand savoir, c'est à dire de M. Arnauld et de M. Lancelot."* Arnauld entsprach damit einer Absicht Bacons, des grofsen Begründers der inductiven Methode, der in seinem Werkchen *„De augmentis scientiarum"* im sechsten Buche von einem solchen Unternehmen spricht. Nicht uninteressant ist, dafs auch der grofse englische Mathematiker Wallis in einem Versuche: *Grammatica linguae Anglicanae cui praefigitur de loquela sive sonorum formatione tractatus Grammatico-physicus* Oxford 1653 den Plan Bacons zu verwirklichen strebte. Zwei Jahre später erscheint *„Die Logik der Herren von Port royal": La Logique ou l'Art de penser contenant outre les regles communes, plusieurs observations nouvelles propres à*

former le jugement. A Paris chez Jean Guignard, Charles Savreux, Jean De Launay MDCLXII. Avec privilege du Roy. Arnauld hatte sie einige Zeit vorher für Honoré d'Albert, Herzog von Chevreuse, verfafst, um ihm das Studium der Logik zu erleichtern. Ursprünglich nicht für die Veröffentlichung bestimmt, gab man sie heraus, aus Furcht, sie könne auf Grund fehlerhafter Kopien dennoch erscheinen. Man hat wohl den Ausspruch gethan, *„dieses Lehrbuch habe alle früheren verdrängt und kein späteres habe dieses vergessen machen können"*. Wirklich machten auch neue und interessante Untersuchungen über die Ursache des Irrtums, die glückliche Wahl der Beispiele und die Anwendung der Regeln auf allgemein interessierende Gegenstände das Buch sehr wirkungsvoll. Es erlebte gegen zehn französische und ebensoviele lateinische Ausgaben; die letzte ist wohl die von A. Fouillée, Paris 1879. Auf den Inhalt einzelner Partien werden wir zurückkommen. Arnauld wurde 1669 in die *„Paix d'église"* aufgenommen, welche die Streitigkeiten in der französischen Kirche beilegen sollte, vom päpstlichen Nuntius und vom Könige in feierlicher Audienz empfangen. In dieser Zeit hatte sein Ansehen den Höhepunkt erreicht; jedermann wollte den berühmten Mann sehen. Dieser Wunsch lebte auch im Herzen eines jungen deutschen Gelehrten, welcher damals die Augen der Welt auf sich zu lenken begann. Wir sind damit an einem neuen interessanten Kapitel angelangt, an

Arnaulds Beziehungen zu Leibniz.

Diese Beziehungen sind für die Aufgabe, die wir uns gestellt, Arnauld als Mathematiker zu würdigen, von grofser Wichtigkeit; denn sie zeigen einerseits, wie sehr der grofse Entdecker der Infinitesimalrechnung Arnauld in dieser Eigenschaft schätzte, und lassen andererseits als hochwichtiges Moment erkennen, dafs Arnauld hinwiederum einen gewissen Einfluſs auf Leibniz' mathematisches Denken und dessen Entwicklung im Gebiete unserer Wissenschaft ausgeübt. Das Interessanteste an den Heroen des Geistes ist uns ja nicht nur, was sie geleistet und was wir ihnen verdanken, sondern auch, von welchen Punkten aus ihre Denkentwicklung sich vollzogen, wie sie zu ihren grofsartigen Resultaten gelangt sind. Diese Wurzeln zu verfolgen bis in die feinsten Verzweigungen, ist eine reizvolle psychologische Aufgabe, welche der von Lessing in das moderne Denken eingeführte Begriff der Entwicklung involviert. Quelle werden für unsere Zwecke in erster Linie die verschiedenen Ausgaben des Briefwechsels der beiden grofsen Männer, welche aber mehr oder weniger vollständig sich ergänzen müssen. Grotefends Ausgabe von 1846 giebt im Anhang unter

A einen längeren lateinischen Brief wieder, welcher zu jenen Programmkundgebungen gehört, mit welchen Leibniz in den Jahren 1668—1671 in der wissenschaftlichen Welt debütierte. Hätten wir gar keine weiteren Dokumente für Leibniz' philosophische Jugendansichten, wir könnten sie hier in vielleicht vollständigster Nebeneinanderreihung finden. Dieser erste lateinische Brief Leibniz' an Arnauld beginnt damit, Leibniz habe oft beim Baron v. Boineburg von Arnauld sprechen hören; jenem aber sei der Doktor der Sorbonne vom Landgrafen von Hessen-Rheinfels gerühmt worden. Es folgt ein kurzer Abrifs der Kämpfe, in welchen das siebzehnte Jahrhundert, diese schroffe Übergangszeit in neue Weltanschauungen, das Alte und Hergebrachte zu stürzen sucht und seine Waffen gegen die Lehren der Kirche kehrt. Leibniz will in die Geisteskämpfe eintreten und sucht daher Fühlung mit den ersten Geistern der Zeit; wie er speziell Arnaulds Autorität ehrt, davon geben uns seine Worte einen Beweis: *„Te pene unum me nosse, ex quo Paschalio excidimus, qui in utroque campo confligere possit; qui eruditione pariter et sapientia, rarissimo connubio, polleat; documento esse Artem illam cogitandi, libellum magnae profunditatis, cuius quisquis autor sit, ex vestra certe schola esse."* Leibniz meint damit Arnaulds Logik. Nachdem er eine Übersicht über seine bisherigen philosophischen Studien gegeben, geht Leibniz zu seinen naturwissenschaftlichen Ansichten über. Er entwickelt seine Vorstellungen über Bewegung, alle jene Gedankenreihen, die er auch in dem Schreiben an Oldenburg vom 15/25. Oktober 1671 (s. *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern*, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. I, 1899) ausgesprochen hat und die niedergelegt sind in der *„Hypothesis physica nova, qua Phaenomenorum Naturae plerorumque causae ab unico quodam universali motu, in globe nostro supposito neque Tychonicis, neque Copernicanis aspernando, repetuntur Autore G. G. L. L. Mogunt. Anno MDCLXXI"*. Dieselbe besteht aus zwei Teilen; im ersten spricht Leibniz von seiner Annahme einer homozentrischen Universalbewegung als Ursache jeder Bewegung und von der Kohäsion; der zweite *„Hypothesis physica"* behandelt die Theorie der Bewegung ohne Rücksicht auf die Phänomene, die Zusammensetzung des Continuums aus unendlich vielen Teilen; lauter Dinge, die in diesem Briefe rekapituliert werden. Schon hier zeigt Leibniz seine Abneigung gegen den Cartesianischen Körperbegriff. Er giebt seine Definition des Punktes, erwähnt seine Ansicht über die Winkel als Gröfsen ohne Ausdehnung und teilt phoronomische Prinzipien mit. Auf die Bewegungslehre baut er seine psychologischen Vorstellungen und leitet daraus seine Ideen über Ethik und Recht ab. Es finden sich sodann Gedanken, die auf seine *„Characteristica realis"* hinzielen, Hieran schliefsen sich die physikalischen Theorien, die Leibniz über Optik,

Schwere, Elasticität und Magnetismus sich ausgebildet hatte; im Anschluſs daran Chemisches und Metereologisches. Am Ende des Briefes erwähnt er eine von ihm gefundene mechanische Vorrichtung zur Lösung geometrischer Aufgaben, dieselbe leiste z. B. die Trisektion des Winkels und die Quadratur des Kreises mit einem für praktische Zwecke hinreichenden Grad von Annäherung. Endlich gedenkt er seiner bekannten Rechenmaschine. Daſs diese Notizen für Arnauld groſses Interesse hatten, beweist ein Brief dieses letzteren vom 5. September 1673 an Pascals Neffen Perier:

„Au reste il y a ici un petit horloger qui ayant vu une machine de M. Pascal l'a perfectionnée de telle sorte, qu'elle est incomparablement plus facile que celle de Monsieur votre oncle, car les roues tournent d'un coté à l'autre, de sorte que sans changer les chiffres par une regle, comme dans la Pascaline, on fait l'addition et la multiplication sur les mêmes chiffres. Il y a de plus un endroit particulier où on fait tout d'un coup la multiplication et les divisions, un autre où on trouve les racines cubiques et d'autres où l'on fait les fractions. Quoique cette machine ait les deniers et les sols, et qu'elle aille jusqu'à cent mille, elle est beaucoup plus petite qu'aucune de M. Pascal; et cet horloger en fait même présentement une autre, qui ne sera plus grande qu'un livre in 12⁰ où tout cela sera. Je ne vous parle point par oui dire; nous avons vu cette machine après diné. Après tout, néanmoins M. Pascal ayant été le premier qui ait trouvé de ces sortes de machines, quoiqu'on y puisse ajouter, il en aura toujours la principale gloire“ . . .

Man kann annehmen, daſs es sich hier um Leibniz' Modell handelt; denn dieses wurde, wie Guhrauer erzählt, in Paris Huygens und Arnauld und Thevenot demonstriert und besaſs die oben angegebenen Verbesserungen. Am Schlusse jenes ersten langen Briefes giebt Leibniz der Hoffnung Ausdruck, sich bald mündlich mit Arnauld über alle jene Gegenstände aussprechen zu können; er hoffe von ihm wertvolle Aufklärungen und Belehrungen zu erhalten. Diese Hoffnung sollte bald in Erfüllung gehen. Am 19. März 1672 ging Leibniz in politischer Mission nach Paris. Hier verkehrte er besonders zu Anfang seines Aufenthaltes viel mit Arnauld. Wichtige Belege hierfür bilden zwei Briefe, die in Grotefends Ausgabe fehlen, aber in der Gesamtausgabe von Arnaulds Werken veröffentlicht sind (Bd. IV, S. 189). Leibniz schreibt hier unterm 27. April 1683: *„J'ai eu l'honneur de connoître M. Arnauld assez particulièrement et j'honore infiniment son merite, qui est reconnu de toute la terre. Nous nous sommes souvent entretenus de sciences; car il n'est pas moins excellent Géomêtre que grand Theologien; il méditoit alors quelque chose de fort beau sur les raisons et sur les proportions, je serois*

fâché s'il en avoit été distrait entièrement. Ce qu'on me compta de sa retraite et du malheur de ses amis ne m'avoit pas peu touché. Au reste qu'en je retournai en Allemagne, il me donna une reponse à un Capucin François demeurant à Hannovre qui lui avait demandé des particularités sur la croyance des Grecs touchant la Transubstantiation: là dedans il dit de moi, en passant, quelque chose de si extraordinairement favorable, que je n'aurois pas osé porter la lettre, si je l'avois su, et je ne l'appris que depuis, par le Prince même, qui avoit retenu cette lettre." Arnauld hatte in dem Briefe mit richtigem Blick sein Urteil über Leibniz dahin abgegeben, dafs ihm (Leibniz) nur noch wenig fehle, um in Wahrheit einer der grofsen Männer des Jahrhunderts zu sein, und dies ist es, was Leibniz, man möchte sagen *„rot vor Freude"* hier andeutet. Leibniz war damals allerdings schon auf der Leiter zur Erkenntnis weit emporgestiegen, aber in der Mathematik war er, als er nach Paris kam, noch wenig vorgebildet, wie er an mehrfachen Stellen selbst erzählt (vgl. M. Cantors *„Vorlesungen"*, Bd. III S. 38), und so mögen die Unterhaltungen mit Arnauld durch dessen reifes Urteil und reiche Erfahrung wohl geeignet gewesen sein, manche Gedankengänge bei Leibniz zu klären, manche Anregungen zu geben, wie ja auch Descartes in der Aussprache seiner Spekulationen endlich eines der besten Mittel zur Selbstbelehrung erkannt hatte. Ein neuer Beweis, dafs Leibniz schon während seines Pariser Aufenthaltes die Anfänge der Differentialrechnung besafs, scheint uns in der folgenden wichtigen Briefstelle vom 4. August 1683, die an den Landgrafen von Hessen-Rheinfels gerichtet ist, enthalten zu sein:

„Quand j'étois à Paris, nous nous sommes entretenus quelques fois sur la Géométrie c'est pourquoi je supplie V. A. S. de lui (Arnauld) envoyer de ma part les papiers ci-joints sur quelques découvertes géométriques: car parmi tant d'autres belles connaissances, il sait parfaitement bien ce qu'il y a de plus beau dans la Géométrie. Ce que je lui envoie a déjà été approuvé et estimé par les premiers Mathematiciens de France et d'Angleterre; et je me souviens de lui en avoir parlé en France. J'avoue cependant très volontiers que ces sortes de curiosités n'ont point de meilleur usage que celui de perfectionner l'art d'inventer et de raisonner juste." Schon der Herausgeber von Arnaulds gesammelten Werken bemerkt hierzu: *„Ce sont peut-être les Regles du calcul differentiel, qu'il insera en 1684 dans le journal de Leipsik"*; also die Abhandlung: *„Nova methodus pro maximis et minimis"*, die Leibniz im Mai 1684 in den *Acta eruditorum* veröffentlichte. In den Jahren 1686—1690 dauert der Briefwechsel ununterbrochen fort. Die Jahre 1671—1690 sind diejenige Periode in Leibniz' philosophischer Ent-

wicklung, in der sich *„die Ausreifung seines Systems“* vollzog (Kuno Fischer). Daher werden im Gedankenverkehr mit Arnauld wesentliche Grundpfeiler seiner Weltanschauung aufgerichtet: sein Substanzbegriff: die Substanz als Kraft, als immaterielles Wesen, der Begriff substantieller Einheit werden festgestellt, die Gemeinschaft zwischen Leib und Seele wird unter beiden Gelehrten eingehend erörtert. Leibniz macht seine Ansicht über die Individualität und Unzerstörbarkeit der Seele, auch der niederer Formen geltend; auch erkenntnistheoretische Passagen (die Präponderanz des Prinzips des Widerspruchs für die ewigen, des zureichenden Grundes für die thatsächlichen Wahrheiten wird betont) sind in einzelnen Briefen vertreten. Gleichsam das Resumé bildet der hervorragend wichtige Brief, welcher vom 23. März 1690 aus Venedig datiert der Schlufsbrief des Commerciums ist. *„Er enthält im Keime Leibniz' ganzes System: den Begriff der Monade, des Mikrokosmus, der Entwickelung und der (prästabilierten) Harmonie“* (Kuno Fischer). Durch die Briefe metaphysischen Inhalts ziehen sich wie ein roter Faden Leibniz' Berichte über seine Entdeckungen im Gebiete der höheren Analysis und der Dynamik. Am 14. Juli 1686 schreibt er an Arnauld:

„Au reste, je me suis souvent diverti à des pensées abstraites metaphysiques et de géométrie. J'ai découvert une nouvelle méthode de tangentes, que j'ay fait imprimer dans le journal de Leipzig. Vous sçavez, Monsieur, que Messieurs Hudde et depuis Slusius, ont porté la chose assez loin. Mais il manquoit deux choses: l'une que lorsque l'inconnu ou l'indeterminée est embarassée dans des fractions et irrationelles, il faut l'en tirer pour user de leurs méthodes: ce qui fait monter le calcul à une hauteur ou prolixitée tout à fait incommode et souvent intractable: au lieu que ma méthode ne se met point en peine des fractions, ny irrationelles. C'est pourquoy les Anglois en on fait grand cas.

L'autre défaut de la méthode des tangentes est, qu'elles ne va pas aux lignes que M. des Cartes appelle Mechaniques, et que j'appelle Trancendentes; au lieu que ma méthode y procede tout de même, et je puis donner par le calcul la tangente de la cycloide ou telle autre ligne. Je pretends aussi generalement de donner le moyen de reduire ces lignes au calcul, et je tiens, qu'il faut les recevoir dans la géométrie, quoyqu'en dise M. des Cartes. Ma raison est qu'il y a des questions analytiques, qui ne sont d'aucun degré, ou bien où dont le degré est demandé; par exemple, de couper l'angle en raison incommensurable de droite à droite. Ce problème n'est ny plan, ny solide, ny sursolide. C'est pourtant un problème et je l'appelle transcendent pour cela. Tel est aussi ce problème: resoudre une telle équation: $X^x + X = 30$, *où l'inconnue même X entre dans l'exposant, et le degré*

même de l'équation est demandé. Il est aisé de trouver ici que cet X peut signifier 3. *Car* $3^3 + 3$ *ou* $27 + 3$ *fait* 30. *Mais il n'est pas toujours si aisé de le resoudre, surtout quand l'exposant n'est pas un nombre rationel; et il faut recourir à des lignes ou lieux propres à cela, qu'il faut par consequence recevoir necessairement dans la géométrie. Or je fais voir, que les lignes que des Cartes veut exclure de la géométrie dependent de telles équations qui passent en effet tous les degrés algebraiques, mais non pas l'analyse, n'y la géométrie. J'appelle donc les lignes reçues par M. des Cartes algebraicas, parcequ'elles sont d'un certain degré d'une équation algebraique; et les autres transcendentes, que je reduis au calcul, et dont je fais voir aussi la construction, soit par points ou par le mouvement; et si je l'ose dire, je pretends d'avancer par là l'analyse ultra Herculis columnas.*" In diesem ausführlichen Briefe giebt Leibniz den Inhalt seines Aufsatzes „*Geometria recondita*" in den *A. E.* von 1686 (M. Cantor, „*Vorlesungen*" S. 197 Bd. III). Der Brief vom 28. November 1686 führt mitten in den berühmten Streit Leibniz' mit den Cartesianern über das Mafs der lebendigen Kraft. Descartes hatte als Konsequenz seines Körperbegriffes gelehrt, die Gröfse der Bewegung in der Natur sei eine konstante, während Leibniz durch seine dynamische Auffassung des Körpers zu der Ansicht geführt wurde, nicht die Bewegungsgröfse, sondern die Summe der bewegenden Kräfte sei die Gröfse, welche bei den Bewegungen der Körperwelt erhalten bleibe. Die Wirkung jeder Kraft ist die Bewegung einer Masse, welche unter dem Einflufs der Kraft eine gewisse Geschwindigkeit erhält. Descartes hatte als Mafs der Leistung das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit betrachtet, während Leibniz an Stelle der einfachen Geschwindigkeit deren Quadrat in die Mechanik einführte. Die Annahme Descartes' ist unvereinbar mit dem Galileischen Gesetz, dafs die Räume sich verhalten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Speziell an dieser Stelle sagt Leibniz: „*Ohne mich darum zu kümmern, wie der Körper seine Geschwindigkeit erlangt, behaupte ich, dafs ein Körper von einem Pfund Masse von einer Geschwindigkeit zweier Grade zweimal so viel lebendige Kraft besitzt als eine Masse von zwei Pfunden, die eine Geschwindigkeit von einem Grad hat. Und ich bin der Ansicht, dafs man bei Erwägung der Bewegung sich stofsender Körper nicht auf die Gröfse der Bewegung sein Augenmerk zu richten hat, wie das Descartes in seinen Regeln thut, sondern auf die Gröfse der Kraft, sonst wäre dem Perpetuum mobile Thür und Thor geöffnet. Setzen wir z. B. voraus, dafs in einem Quadrate LM ein Körper A sich auf der Diagonale bewege und zur gleichen Zeit auf zwei ihm gleiche Massen B und C stofse, derart, dafs im Momente des Stofses die Centren der drei Kugeln ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bilden, und der ganze*

Vorgang sich in der Horizontalebene abspielt, setzen wir weiter voraus, daſs nach dem Stoſse der Körper A an der Stelle 2A in Ruhe bleibt und seine ganze Kraft auf die beiden Körper B und C überträgt, dann wird B von 1B bis 2B mit der Geschwindigkeit und Richtung 1B2B laufen und C von 1C nach 2C mit der Geschwindigkeit und Richtung 1C2C. Das heiſst, wenn A eine Sekunde gebraucht hatte, um in gleichförmiger Bewegung von 1A nach 2A zu gelangen vor dem Stoſse, so wird auch B eine Sekunde brauchen, um von 1B nach 2B zu laufen und ebenso C in derselben Zeit von 1C nach 2C. Es frägt sich nun, welches ist die Länge der Strecke 1B2B oder 1C2C, welche die Geschwindigkeit repräsentiert. Ich behaupte, daſs sie gleich AL oder AM ist, Seiten des Quadrats LM. Denn wenn die Massen gleich sind, so verhalten sich die Kräfte wie die Höhen, von denen die Körper herabfallen müssen, um die betreffenden Geschwindigkeiten zu erlangen: die Summe der Quadrate 1B2B und 1C2C ist gleich dem Quadrate 1A2A. Also die Gröſse der Kraft ist nach dem Stoſse dieselbe wie vorher, aber die Bewegungsgröſse ist gewachsen; denn wenn die Massen gleich sind, kann man jene (die Bewegungsgröſse) durch die Geschwindigkeit in der Gleichung darstellen, vor dem Stoſs war die Geschwindigkeit 1A2A; nach dem Stoſs ist sie gleich der Summe $1B2B + 1C2C > 1A2A$. Nach Descartes aber dürfte, damit die Bewegungsgröſse konstant bliebe, der Körper B nur nach β, der Körper C von 1C nur nach k gelangen, derart, daſs $1B\beta = 1Ck = \frac{1}{2}1A2A$ wäre. Aber auf diese Weise ginge soviel Kraft verloren, als die Differenz der Summe der Quadrate über 1Bβ und 1Ck gegen das Quadrat über 1A2A beträgt. Umgekehrt kann man zeigen, daſs man durch den Stoſs auch Kraft gewinnen könnte, denn wenn der Körper A mit der Geschwindigkeit 1A2A auf B und C auftrifft und ihnen nach Descartes die Geschwindigkeiten 1Bβ und 1Ck erteilt, während er selbst an deren Platz still steht, so würden vice versa die Körper B und C, wenn sie mit den Geschwindigkeiten 1Bβ und 1Ck zurückliefen, dem Körper A die Geschwindigkeit 1A2A erteilen, damit würde dann aber unfehlbar eine kontinuierliche Bewegung eintreten; denn vorausgesetzt, der Körper B von einem Pfund könnte vermöge seiner Geschwindigkeit β1B zu einer Höhe von einem Fuſs aufsteigen und C ebenso, so hätte man vor dem Stoſs eine Kraft, die zwei Pfund auf einen Fuſs Höhe zu bringen vermag.[1]) *Aber nach dem*

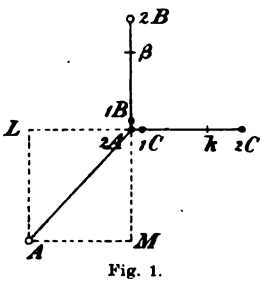


Fig. 1.

1) Oder ein Gewicht von einem Pfund auf zwei Fuſs.

Stofs von B und C auf A hätte der Körper A die doppelte Geschwindigkeit erreicht, nämlich die Geschwindigkeit $1A2A = 2\widehat{\beta 1 B} = 2\widehat{k 1 C}$, *und könnte ein Pfund vier Fufs heben, denn die Höhen, zu welchen die Körper vermöge der Geschwindigkeiten, die sie besitzen, sich erheben können, verhalten sich wie die Quadrate genannter Geschwindigkeiten. Wenn man aber so das Doppelte der Kraft gewinnen kann, so ist das Problem des Perpetuum mobile durchaus gelöst. Schlechterdings ist es aber unmöglich, Kraft aus nichts zu gewinnen oder grundlos zu verlieren, und Regeln, die zu solchen Folgerungen führen, sind mit Unrecht gang und gäbe.*"

Als Leibniz Arnauld in dieser Frage erstmals Mitteilung gemacht und ihm eine Druckschrift, wohl den Aufsatz: *Brevis demonstratio Erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa Legem naturalem* u. s. w. *A. E.* an. 1686, Gerhardts Leibnizausgabe Bd. VI, S. 117, gesandt hatte, war Arnaulds Stellungnahme zuerst etwas skeptisch gewesen und er hatte Leibniz auf Descartes' Briefe hingewiesen (Brief vom 28. September 1686 Arnaulds).

Es seien schon zwanzig Jahre, dafs er sich mit solchen Fragen beschäftigt habe, was genau mit dem Datum des Briefes jenes De Labrosse übereinstimmt, und er könne zunächst kein definitives Urteil abgeben. Leibniz fand die betreffende Stelle in den *„Lettres"* Descartes', wo letzterer darauf hinwies, dafs man in gewissen Fällen nur auf die Steighöhe zu achten habe und von der Geschwindigkeit (d. h. der ersten Potenz derselben) absehen könne; aber in seinen anderen physikalischen Schriften hatte Descartes jene Angabe nicht verwertet, und so war die Konfusion um so gröfser geworden. In den *„Nouvelles de la republique des lettres"* im Septemberheft hatte ein gewisser Abbé D. C. (Catelan) geantwortet, aber ohne rechtes Verständnis für die Sache, so erzählt Leibniz in dem Brief an Arnauld weiter. Am 4. März 1687 antwortet Arnauld, dafs der Abbé Catelan, Leibniz' Gegner, als geschickter Geometer in Frankreich bekannt sei; doch könne ja der Meinungsaustausch zwischen jenem und Leibniz nur geeignet sein, jene mechanische Streitfrage aufzuklären und sie definitiv zu entscheiden. Auch im Briefe Leibniz' vom 30. April 1687 wird die Kontroverse wieder erwähnt. Er erkundigt sich nach Arnaulds Urteil über seine Entgegnung an Catelan in den *Nouvelles de la republique des lettres.* Jener möge ja ein gelehrter Mann sein, was er aber gegen ihn (Leibniz) und Huygens geschrieben habe, sei ein wenig voreilig gewesen. Am 1. August 1687 berichtet Leibniz an Arnauld weiter, dafs an Stelle Catelans jetzt der berühmte Malebranche gegen ihn die Feder ergriffen habe. Dieser letztere gebe zu, dafs einige der von ihm verfochtenen Bewegungsregeln sich nicht recht aufrecht erhalten liefsen, wohl deshalb, weil er sie auf die Annahme einer unendlichen Zeitdauer

gegründet habe, die es in der Natur nicht gäbe. Leibniz ist der Ansicht, dafs dieser Umstand unwesentlich sei; in dem Briefe an Arnauld fährt Leibniz fort: *„Et c'est un défaut des raisonnemens de M. des Cartes et des siens, de n'avoir pas considéré, que tout ce qu'on dit du mouvement, de l'inégalité et du ressort, se doit vérifier aussi quand on suppose ces choses infinement petites, ou infinies. En quel cas le mouvement (infinement petit) devient repos; l'inégalité (infiniment petite) devient égalité; et le ressort (infiniment prompt) n'est autre chose qu'une dureté extrême; à peu-près comme tout ce que les géomètres démontrent de l'ellipse se vérifie d'une parabole, quand on la conçoit comme une ellipse dont l'autre foyer est infiniment éloigné. Et c'est une chose étrange de voir que presque toutes les regles du mouvement de M. de Cartes choquent ce principe, que je tiens aussi infaillible en physique qu'il l'est en géométrie, parceque l'Auteur des choses agit en parfait géomètre. Si je replique au R. P. Malebranche, ce sera principalement pour faire connoître le dit principe, qui est d'une très-grande utilité, et qui n'a guere encore été considéré en général, que je sache."* Die Gesetze der Bewegung müssen auch für unendliche Verhältnisse ihre Gültigkeit besitzen, denn in der Natur sind Ruhe und Bewegung, Gleichheit und Ungleichheit, keine Gegensätze sonst könnte kein Übergang von einem zum anderen stattfinden. In der kontinuierlichen Veränderung verschwinden die Gegensätze — *natura non facit saltus* —; diese aber bedingt den Begriff des Unendlichkleinen, des Differentials, als ihres Elementes. Leibniz teilt hier also Arnauld sein berühmtes Stetigkeitsgesetz, Gesetz der Kontinuität, noch vor der eigentlichen Publikation desselben mit; sie geschah in Leibniz' Aufsatz: *Principium quoddam Generale non in Mathematicis tantum, sed et Physicis utile cuius ope ex consideratione Sapientiae divinae examinantur Naturae Leges, qua occasione nata cum R. P. Mallebranchio controversia explicatur, et quidam Cartesianorum errores notantur.* (Leibnizausgabe von Gerhardt Bd. VI, S. 129, veröffentlicht in den *Nouvelles de la republique des lettres.*)

Der Streit zieht sich aber noch hin. Im Briefe vom 28. August 1687 spricht Arnauld von einer weiteren Entgegnung Catelans vom Juni desselben Jahres. Catelan und Malebranche haben also neben einander Leibniz' Kraftmafs bekämpft. Arnauld findet, dafs Catelan auch diesmal nicht in Leibniz' Gedanken eingedrungen sei: *„Mais il n'a peut-estre pas bien pris vostre pensée."* Wir sehen in diesen Worten, dafs Arnauld, der ja selbst hervorragender Cartesianer ist, leidenschaftslos beginnt, Leibniz' besserer Einsicht nachzugeben. Mit den warmen Worten: *„C'est pourquoi je m'estime heureux d'avoir rencontré en vous un censeur également exact et équitable"* dankt ihm Leibniz dafür im Briefe vom 9. Oktober 1687. Im September erwiderte Leibniz auf Catelans fortwährende Angriffe;

aber er hatte der Wortkämpfe genug und legte dem Abbé ein geometrisch-mechanisches Problem vor: die Curve zu finden, in welcher ein schwerer Körper so fällt, dafs er in gleichen Zeiträumen der Horizontalebene um einen gleichen senkrechten Abstand sich nähert. Dies erzählt Leibniz im Briefe vom 14. Januar 1688 Arnauld. Er sagt: „*Afin de dire quelque chose d'util, j'ai proposé un problème*[1]) *... qui est de trouver une ligne que j'appelle isochrone, dans laquelle le corps pesant descend uniformement et approche, également de l'horison en temps égaux, non obstant l'acceleration qui luy est imprimé, que je recompense par le changement continuel de l'inclination ... Mon dessin étoit d'excercer un peu M. l'Abbée ou ses amis et de leur faire experimenter si l'analyse ordinaire va aussi loin qu'on s'imagine. Mais M. Huygens a jugé ce problème digne de le resoudre lui-même. Aussi l'aurions-nous peut être attendu longtemps de la part de M. l'Abbée. Nous verrons ce qu'il en dira ... Il est vraye que lorsqu'on sçait une fois la nature de la ligne que M. Huygens a publiée, le reste s'acheve par l'analyse ordinaire. Mais sans cela la chose est difficile. Car la converse des tangentes ou data tangentium proprietate invenire lineam (où se réduit ce problème proposé) est une question dont M. des Cartes luy même a avoué dans ses lettres n'estre pas maistre. Car le plus souvent elle monte aux transcendentes (comme je l'appelle) qui sont de nul degré, et quand elle s'abbaisse aux courbes d'un certain degré (comme il arrive icy) un analyste ordinaire aura de la peine à le reconnoistre.*" Es war dies eine umgekehrte Tangentenaufgabe. Das erste Problem dieser Art war die Debeaunesche Aufgabe gewesen, die Leibniz 1675 löste und 1684 am Schlufs seines Aufsatzes „*Nova methodus*" veröffentlicht hatte. Im April 1689 in den *A. E.* gab Leibniz die eigene Lösung seines Isochronenproblems. In dem Briefe, der uns soeben beschäftigt hat, kommt Leibniz noch auf seine *Characteristica generalis;* er erzählt, er habe hübsche Resultate „*j'ay des definitions, axiomes, theoremes et problèmes fort remarquables de la coincidence, de la determination (ou de unico), de la similitude, de la relation en général, de la puissance ou cause, de la substance, et par tout je procede par lettres d'une manière precise et rigoureuse, comme dans l'algebre.*" Er möchte von Arnauld wissen, wie man wohl diese Ergebnisse an die Wahrscheinlichkeitsrechnung anschliefsen könne. „*Mais comment (me dirés vous) peut on appliquer ce calcul aux matieres conjecturales? Je réponds que c'est comme Messieurs Pascal, Huygens et d'autres on donné des demonstrations de alea. Car on peut determiner le plus probable et le plus sur autant qu'il est possible de connoistre ex datis.*" In dem schon

1) Der Text in der Gesamtausgabe von Arnaulds Werken weicht von Grotefends Ausgabe unwesentlich ab.

erwähnten wichtigen Briefe aus Venedig, dem letzten, bespricht Leibniz seine Theorie der Planetenbewegung, die er in den *A. E.* 1689 in der Abhandlung: *„Tentamen de motuum coelestium causis"* niedergelegt hat. Hier in dem Briefe an Arnauld sagt er darüber:

„Il y a déjà quelque tems que j'ai publié dans les Actes de Leipsic un essai pour trouver les causes physiques des mouvemens des astres. Je pose pour fondement que tout mouvement d'un solide dans le fluide, qui se fait en ligne courbe ou dont la vélocité est continuellement diforme, vient du mouvement du fluide même. D'où je tire cette conséquence, que les astres ont des orbes déférens, mais fluides. J'ai demontré une proposition importante générale, que tout corps qui se meut d'une circulation harmonique (c'est-à-dire en sorte que les distances du centre étant en progression arithmétique, les vélocités soient en progression harmonique, ou réciproques aux distances) et qui a de plus un mouvement paracentrique, c'est-à-dire de gravité ou de lévité à l'égard du même centre (quelque loi que garde cette attraction ou répulsion) a les aires necessairement comme les tems, de la manière que Kepler l'a observée dans les planètes. Puis considerant ex observationibus que ce mouvement est elliptique, je trouve que le corps du mouvement paracentrique, lequel joint à la circulation harmonique décrit des ellipses, doit être tel que les gravitations soient réciproquement comme les quarrés des distances, c'est à dire comme les illuminations ex sole."

Leibniz leitet die Bewegung der Planeten aus der Kreisbewegung des umgebenden Mediums ab und gelangt zu den Keplerischen Ellipsen und zu Newtons Gesetz. Auch der letzte Passus des Briefes ist mathematischer Natur:

„Je ne vous dirai rien de mon calcul des incrémens ou différences, par lequel je donne les touchantes sans lever les irrationalités et fractions, lors même que l'inconnue y est enveloppée, et j'assuettis les quadratures et problèmes trancendans à l'analyse. Et je ne parlerai pas non plus d'une analyse toute nouvelle, propre à la géométrie, et différente entièrement de l'algebre; et moins encore de quelques autres choses, dont je n'ai pas encore eu le tems de donner des essais, que je souhaiterois de pouvoir toutes expliquer en peu de mots pour en avoir votre sentiment, qui me serviroit infiniment si vous aviez autant de loisir que j'ai de déférence pour votre jugement."

Wir haben diese Stelle, wie auch hinsichtlich des philosophischen Teils schon bemerkt wurde, als eine kurze Rekapitulation der früheren Bemerkungen aufzufassen. Alle diese fortlaufenden Berichte Leibniz' über seine Resultate auf mathematischem Gebiete liefern den unumstöfslichen Beweis, dafs er im Verkehr mit Arnauld in Paris sich die Überzeugung gebildet hatte, dafs dieser auch für die Fragen der höheren Mathematik volles Verständnis und eine geschätzte Beurteilungsfähigkeit besessen hat. Einen

wichtigen Beleg hierfür bildet auch die Thatsache, dafs Arnauld zu den Personen gehörte, welche von Huygens ein Dedikationsexemplar[1]) seines berühmten Werkes: *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parisiis F. Muguet 1673 fol. erhielten; wie wichtig diese Gabe für Leibniz wurde, erzählt uns M. Cantor in seinen *„Vorlesungen"* Bd. III S. 78. — Auch auf philosophischem Terrain ist Arnauld später mit Huygens in Berührung gekommen. Der berühmte Physiker hatte 1692 einen philosophischen Versuch verfafst *„De veritate aeterna, sapientia et justitia aeterna"*. Dagegen schrieb Arnauld eine Dissertation *„Bipartite"*, die wiederum von einem Benediktinerpater Lami, der auch gegen Spinoza und Leibniz die Feder führte, angegriffen wurde. Gegen ihn wandte sich Arnauld mit seiner Schrift *„Regles du bon sens . . . pour bien juger des Ecrits polemiques dans des matières de Sciences"* 1693.

Wir haben jetzt wieder auf Arnaulds äufsere Schicksale zurückzugreifen. Nachdem seine Rehabilitation durch den Frieden Clemens' IX. im Jahre 1669 erfolgt war, machte Arnauld mehrere Reisen, schlofs Freundschaft mit dem Dichter Boileau, dessen Satiren er in einer kleinen Schrift verteidigte, worüber dieser so entzückt war, dafs er ihm folgende Verse widmete, die zugleich seine (Boileaus) Grabschrift bilden sollten:

Arnauld le grand Arnauld fit mon apologie
Sur mon tombeau futur mes vers, pour l'enoncer,
Courés en lettres d'or de ce pas vous placer!

und versöhnte sich mit Racine, dem berühmten Schüler von Port royal, mit dem er sich wegen der *„Phaedra"* überworfen hatte. Aber seine alten Feinde liefsen nicht nach, ihn bei Hofe zu verdächtigen, wie sogar nach seinem Tode die Jesuiten noch bewirkt haben sollen, dafs Arnaulds und Pascals Porträts und Elogien aus dem Werke M. Perraults: *„Les hommes illustres qui ont paru en France pendant ce Siècle, avec leurs portraits au naturel"* Paris 1696 fol. vom Verleger entfernt werden mufsten, worauf man das Wort des Tacitus anwandte: *„Praefulgebant eo ipso, quod effigies eorum non visebantur."*

Arnauld empfing in seiner Wohnung in dem Faubourg Saint-Jaques oft Besuche seiner zahlreichen Freunde, und so wurde es seinen Widersachern leicht, den Glauben zu erwecken, dafs er Konspirationen der Jansenisten gegen den König anzetteln wolle. Als seine mächtigen Gönner, wie der Herzog und die Herzogin von Longueville, gestorben waren, legte

1) Chr. Huygens, *Oeuvres complètes, Publiées par la Société Hollandaise des Sciences, la Haye 1888* — Tom. VI. S. 321 in einer Fufsnote, welche Huygens' *Adversaria* (Notizbücher) entstammt.

man Arnauld nahe, Paris zu verlassen. So mufste er 1679 ins Exil gehen. Die gastlichen Niederlande nahmen ihn auf; hier lebte er zunächst in Fontenay-aux-Roses und dann in Mons in Flandern. Hier in seinem niederländischen Refugium entstanden die Schriften, welche bezeichnend sind für

Arnaulds antagonistisches Verhalten gegen Malebranche und den Occasionalismus.

Es ist bekannt, wie Malebranche, der berühmte *„Auteur de la recherche de la vérité"*, das Cartesianische System auf dem Wege zu Spinoza konsequent weiter gebildet hat. Wir beabsichtigen hier nicht, eine eingehende Darstellung seiner Lehren zu geben, sondern rufen nur die charakteristischen Sätze in Erinnerung, indem wir Kuno Fischers vollendete Interpretation im II. Bande seiner *„Geschichte der neueren Philosophie"* zugrunde legen. Malebranche bejaht die Substantialität der Ausdehnung, aber deren Modifikationen, die Körper, sind an sich absolut unwirksam; seine Lehre ist *„gewissermafsen die Mortifikation der Materie"*. Die Körper sind nicht Ursache der Wirksamkeit, sondern sie sind nur Instrumente, nur zufällige, occasionale Ursache. Es giebt nur eine wahrhafte Ursache: das ist Gott. *„Das Universum ist in Gott, aber nicht Gott im Universum"*, so grenzt Malebranche sein System gegen Spinoza ab. Gott ist der Urheber sowohl der Ruhe als der Bewegung in der Körperwelt. Die Welt ist gesetzmäfsig, weil der göttliche Wille beharrt und konstant ist. Die Gotteserkenntnis ist unter allen Einsichten die klarste und deutlichste; unsere Selbsterkenntnis hat den Charakter unmittelbarer Gewifsheit, aber die Natur des Geistes ist nicht so evident, wie die des Körpers — hier tritt Malebranche in Gegensatz zu Descartes —, daher ist die Mathematik klarer als die Psychologie. Wären Seele und Körper in gleichem Grade erkennbar, *„so müfste man aus der denkenden Natur mit derselben Leichtigkeit und Klarheit die Farben und Töne herleiten können, als aus der ausgedehnten die Figuren des Dreiecks, des Quadrats u. s. f."* Die Körper können nur durch Ideen erkannt werden. Die Ideen aber — das Problem ihres Ursprungs im menschlichen Geiste wird nach allen Seiten und Möglichkeiten von Malebranche eingehend erörtert — sind und bleiben nur in Gott. Die Erkenntnis der Dinge ist aber nur möglich durch die Ideen, also sehen wir die Dinge in Gott. Die Ideen der einzelnen Körper sind nur Modifikationen der Idee der Ausdehnung, diese Idee der Ausdehnung ist Malebranches intelligible Ausdehnung, der Archetyp der Körperwelt. Diese allgemeinste Idee ist Objekt der *„allgemeinen Vernunft"*, d. h. sie wird

von allen Geistern gleich geschaut, und die *„allgemeine Vernunft"* ist die göttliche, Gott ist der Ort der Geister, und er schaut in sich die intelligible Ausdehnung, welche die Ideen der Körper in sich schliefst, d. h. wir sehen die Dinge in Gott. Malebranches Lehre neigt schon stark zum Pantheismus, ja sie geht, wenn man den Unbegriff der intelligiblen Ausdehnung eliminiert, restlos in den Spinozismus auf. Das fühlte Arnaulds feiner metaphysischer Instinkt. Er beschlofs also, Malebranches von seinem (Arnaulds) Standpunkt verderblich erscheinenden Spekulationen planmäfsig zu bekämpfen. Arnauld und Malebranche waren, ehe jener langdauernde litterarische Streit ausbrach, persönlich sehr befreundet. Malebranche hatte sich das unerreichbare Ziel gesteckt, Religion und Philosophie seiner Zeit in einem *„Traité de la nature et de la grâce"* zu versöhnen. Darüber wünschte er Arnaulds Ansicht zu hören, und man veranlafste 1678 eine Zusammenkunft beim Marquis von Roney. März 1680 erhielt er einen Brief von Malebranche, worin dieser eine Schrift ankündigte über die vor zwei Jahren besprochenen Gegenstände. Arnauld verschob die Antwort und erfuhr unterdessen, dafs der Druck im Werk sei. Arnaulds erster Gedanke war, denselben zu hintertreiben, um seinem Freunde einen Dienst zu erweisen und jenen abzuhalten, Dinge zu veröffentlichen, von deren Unrichtigkeit er persönlich überzeugt war. Aber das Buch erschien trotz seiner Bemühungen. Er griff also zur Feder, nachdem er Malebranche seine Absicht mitgeteilt, und jener gegen eine Kritik nichts einzuwenden hatte, und zwar wollte er zuerst den philosophischen Teil, Malebranches Ideenlehre, entkräften. Unter Arnaulds Händen wuchsen seine Entwürfe zu dem Buche aus: *„Des vraies et des fausses idées"*. Obwohl die Einwürfe in rücksichtsvollem Tone eines Freundes vorgetragen waren, veranlafsten sie in dem Briefe vom 15. Januar 1684 eine leidenschaftliche Entgegnung Malebranches, worin dieser Arnauld vorwarf, dafs ihm die Sucht, vor seinen Anhängern zu glänzen, mehr gelte als die Liebe zur Wahrheit. Die nochmalige Entwickelung der occasionalistischen Ansichten war in elegantem Stil verführerisch dargestellt und liefs die starke Dunkelheit vieler Punkte übersehen. Dies war die Einleitung zu dem Streite zweier Geistesheroen, an dem die ganze gebildete Welt das gröfste Interesse nahm. Denn Malebranche und Arnauld galten für die ersten lebenden Philosophen Frankreichs. Malebranche hatte sich durch sein eingangs erwähntes Hauptwerk als feiner Metaphysiker und glänzender Schriftsteller gezeigt und Arnauld war ein durch vierzig Jahre erprobter Geisteskämpfer; die Verfolgungen, die er damals erduldete, hatten ihn mit dem Glorienschein eines Märtyrers seiner Sache umgeben. Malebranche warf seinem Gegner vor, er sei nicht mehr im-

stande, seine Ansichten zu verstehen. Selbst Anhänger des Occasionalismus aber sahen sich gezwungen anders zu urteilen und weit entfernt, einen durch lange Arbeit erschöpften Geist in ihm zu finden, konnten sie nicht umhin, dieselbe Kraft und Behandlungsart der Materie bei ihm wiederzuerkennen, die man von jeher an ihm bewundert hatte. Malebranche selbst konnte es sich nicht verhehlen; er sagte entschuldigend, er kämpfe gegen zwei mächtige Gegner, gegen Arnauld und dessen Ruf, und letzterer sei für ihn das Gespenst, das er nicht zu fassen vermöge und das jenem im Voraus zum Siege verhelfe. Im Jahre 1684 erschien Arnaulds Erwiderung auf Malebranches Brief unter dem Titel: *„Défense de M. Arnauld etc. contre la réponse au livre des vraies et des fausses idées"*. In dieser schlug nun auch er einen schärferen Ton an. *„Der hauptsächlichste Streitpunkt zwischen Malebranche und Arnauld betraf die Lehre von der göttlichen Vorsehung und Gnade, von der unbedingten, in jeder einzelnen Begebenheit wirksamen Prädestination, von der grundlosen göttlichen Willensfreiheit, die durch keinerlei Notwendigkeit und anderweitige Freiheit (menschliche Willensunabhängigkeit) zu binden sei oder eingeschränkt werden dürfe. Für Arnauld giebt es keine Anerkennung einer Notwendigkeit in Gott, jeder Versuch einer Theodicee, jede optimistische Weltansicht, welche den göttlichen Willen für verpflichtet hält, die vollkommenste und beste Welt zu schaffen, erschien ihm als ein naturalistischer, dem christlichen Glauben widersprechender Zug"* (Kuno Fischer). Arnauld bekämpfte mit einem Wort: *„la prétention, qu'on ne peut voir les corps que dans l'étendue intelligible; que ce qu'enseignoit S. Augustin, qu'on voit en Dieu les vérités éternelles et immutables, étoit plus différent que le jour ne l'est de la nuit de cette monstreuse philosophie de la vue du soleil, d'un cheval, d'un arbre dans une étendue intelligible qu'on prétend être Dieu."* (In der Schrift gegen Huygens.) Nacheinander erfolgten von Seiten Arnaulds die *„Reflexions philosophiques et theologiques"*, welche 1685 und 1686 in drei Bändchen in Duodez erschienen, dann (im ganzen neun, zuerst sieben, dann noch zwei weitere) *Lettres de M. Arnauld, Docteur de Sorbonne, au Réverend P. Malebranche, Prêtre de l'oratoire, sur les idées générales, la grâce et l'étendue intelligible.* Besonders die sieben ersten Briefe galten als ein Meisterwerk und wurden viel bewundert. In den beiden späteren sucht Arnauld nachzuweisen, daſs Malebranche seine Ansicht von der *étendue intelligibile* nicht aufrecht erhalten könne, ohne Gott materiell zu machen. Jede der aufgezählten Schriften veranlaſste eine heftige Gegenschrift Malebranches, welche alle wieder Verteidigungen seiner Ansichten oft in denselben Worten brachten, und worin er nicht aufhörte, Arnaulds Loyalität anzuzweifeln. Die Einmischung Bayles, des Herausgebers der *„Nouvelles de la republique des lettres"*, veranlaſste eine

Replik Arnaulds *„Avis sur le prétendu bonheur des plaisirs de sens"* und eine längere Duplik Bayles im Dezemberheft genannter Zeitschrift 1685.

Für den Mathematiker interessant ist, dafs Malebranche im Verlauf der philosophischen Fehde Arnauld verspottete, dafs *dieser über Geometrie geschrieben habe: „sans avoir d'idée de l'objet unique de cette science, qui n'en avoit point d'autre que l'étendue intelligible"* (nach Malebranche). Arnauld erwiderte bescheiden: *„que le P. Malebranche n'avait pas toujours parlé de même sur sa Géométrie, puisqu'il y avoit renvoyé dans sa 'Recherche de la vérité' pour y apprendre cette science."* Er fährt weiter fort: *„que sa Géométrie devoit avoir pour objet non l'étendue intelligible, mais l'étendue divisible et mobile, que d'ailleurs, nee l'ayant composé que par forme de divertissement, il n'avoit point eu un dessin si relevé que de faire une Géométrie Theologique et divine, comme elle l'auroit été, si elle avoit eu Dieu ou l'étendue itelligible pour l'objet." (Défense de M. Arnauld contre la Replique au livre des vraies et des fausses Idées V. Part. XI. Exemple à la fin.)* Wirklich hatte Malebranche einst in seinem Hauptwerke Arnaulds Lehrbuch zum Studium der Geometrie, die von Malebranche sehr hoch geschätzt wurde, empfohlen. Die Antwort Arnaulds ist eine beifsende Satyre gegen Malebranches *étendue intelligible,* ein Zug, der überhaupt Arnaulds Polemik oft durchweht.

Der Streit war schon mehrere Jahre beigelegt, als Régis, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, Malebranche wegen dreier Lehren seines Systems angriff, nämlich hinsichtlich seiner Ideenlehre, des sinnlichen Vergnügens und seiner sittlichen Würdigung und wegen dessen Ansicht über die sichtbare Gröfse der Gegenstände, eine optische Frage, in welcher Malebranche die Auffassung Descartes' acceptiert und weiter entwickelt hatte. Régis verwies hinsichtlich der beiden ersten Punkte auf Arnauld, der Malebranches Meinung glänzend widerlegt habe. Der vielgeplagte Malebranche antwortete in einem offenen Briefe im Märzheft des *„Journal des Sçavans"*, es sei weder seine Sache, noch aber die des Régis, zu entscheiden, ob wirklich Arnauld in jenem Streite die Oberhand behalten habe, da sie beide nicht unparteiisch seien und deshalb nicht objektiv urteilen könnten. Er führe gegen Arnauld den hl. Augustin ins Feld, welcher in seinen Werken mit ihm (Malebranche) übereinstimme. Jetzt trat auch Arnauld wieder hervor; er erwiderte in zwei Briefen, welche im *„Journal des Sçavans"* erschienen (Juni und Juli 1694). Bald nach seinem zweiten Briefe bekam Arnauld eine Antwort Malebranches gegen Régis zu Gesicht; er zögerte nicht, sich in einem dritten Briefe noch ausführlicher zu äufsern, worin er sagt, dafs er hinsichtlich der erkenntnistheore-

tischen und moralischen Frage mit Régis übereinstimme, inbezug auf das optische Problem aber immer der Ansicht Malebranches gewesen und durch die Erklärungen, welche jener in seiner *„Recherche de la vérité"* über den Gegenstand gäbe, noch wesentlich darin bestärkt worden sei. Malebranches Erregung wurde hierdurch nicht beschwichtigt, er liefs seinerseits noch zwei weitere Briefe im *„Journal des Sçavans"* drucken, der erste vom 1., der zweite vom 7. Juli. Arnauld setzte ihm einen vierten Brief entgegen, welcher vom 25. Juli datiert ist. Es war die letzte Äufserung Arnaulds in dem langen Federkriege. Am 8. August 1694 starb Arnauld zu Brüssel, nach andern in einem Dorfe unweit Lüttich. Malebranche konnte es sich nicht versagen, 1704 nochmals eine Antwort auf den dritten und vierten Brief zu veröffentlichen, welche ihm erst fünf Jahre nach dem Tode des Verfassers zu Gesicht gekommen seien; er behauptete darin, dafs jene vier Briefe, welche unter dem Namen Arnaulds gegen ihn veröffentlicht worden seien, gar nicht von jenem herrührten.

Arnauld hatte sich bis in sein hohes Alter — er wurde zweiundachtzig Jahre alt — seine Geistesfrische bewahrt. Am 18. November 1680 schreibt Huygens an Leibniz: *„Mr. Arnaut* (so schreibt Huygens den Namen immer) *est en ce pays, ou fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse"* (Gerhardt, *der Briefwechsel Gottfried Wilhelm Leibniz' mit Mathematikern* Bd. I S. 616). Ebenda äufsert sich Leibniz gegen Tschirnhaus über jenen Streit und über Malebranche: *„Je m'étonne que Messieurs Arnaud et Malebranche, qui estoient si bons amis, quand j'estois à Paris, écrivent maintenant l'un contre l'autre; je n'ai pas encore lû leurs écrits opposés, mais autant que je puis juger par leurs autres ouvrages, le Père Malebranche a beaucoup d'esprit, mais Mons. Arnaud écrit avec plus de jugement. Il y a quantité de jolies pensées dans la Recherche de la vérité, mais il s'en faut beaucoup que l'auteur ait pénétré bien avant dans l'analyse et généralement dans l'art d'inventer, et je ne pouvois m'empêcher de rire quand je voyois, qu'il croit l'Algèbre la première et la plus sublime des sciences, et que la vérité n'est qu'un rapport d'égalité et d'inégalité, que l'Arithmétique et l'Algèbre sont les seuls sciences qui donnent à l'esprit toute la perfection et toute l'estendue dont il est capable, enfin que l'Arithmétique et l'Algèbre sont ensemble la veritable Logique. Et cependant je ne voy pas que luy même ait grande connoissance de l'Algèbre. Les louanges qu'il donne à l'Algèbre, se devroient donner à la Symbolique en général dont l'Algèbre n'est qu'un echantillon assés particulier et assés borné."*

Nachdem wir Arnaulds Leben geschildert und seinen geistigen Verkehr mit den grofsen Philosophen der Zeit entwickelt haben, wobei wir

auch speziell den mathematischen Gegenständen in den Beziehungen zu Leibniz erhöhte Aufmerksamkeiten zuwandten und das Urteil jener Männer über Arnaulds mathematische Qualitäten kennen lernten, wenden wir uns jetzt in dem zweiten Teile vorliegender Arbeit zur Besprechung von Arnaulds eigenen litterarischen Produktionen und deren Bedeutung im Gebiete der mathematischen Wissenschaften.

Für die äufseren Lebensdaten der Biographie Arnaulds haben wir benützt:

1) (Quesnel), *Histoire abregée de la vie et des ouvrages de Mons. Arnauld.* A Cologne, chez Nicolas Schouten. MDCLXXXXV, mit Portrait Arnaulds.

2) I. M. Schröckh, *Arnauld, A., Doktor der Sorbonne,* Leipzig (in I. M. Schröckhs *Lebensbeschreibung berühmter Männer.* Leipzig, 2 Bde. 1789/91).

3) Höfer, *Nouvelle biographie générale.* Paris 1855—66. 46 vols. Artikel: *Arnauld, Antoine.*

4) Saint-Beuve, *Port-Royal,* Tom. II. 2 éd. Paris 1860.

Sammlung der Werke.

Die Werke Arnaulds wurden 84 Jahre nach seinem Tode in einer monumentalen Gesamtausgabe vereinigt. Nachdem schon im Jahre 1759 ein Prospekt veröffentlicht worden war, stellte der Tod des Papstes Benedikt XIV. das Unternehmen in Frage, da unter seinem Nachfolger Clemens XIII. ein Systemwechsel eintrat. Erst 1774 konnte man daran denken, mit einem neuen Prospekte hervorzutreten; die nun rasch nacheinander veröffentlichte Ausgabe umfafst 42 Bände und erschien unter dem Titel: *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld Docteur de la Maison et Société de Sorbonne. A Paris et se vend à Lausanne chez Sigismond d'Arney et Compagnie.*

Die Werke sind eingeteilt in acht Klassen; die ersten vier Bände enthalten:

I.	die	Briefe	vom	Jahr	1637—1676,
II.	„	„	„	„	1677—1687,
III.	„	„	„	„	1687—1694,
IV.	„	„	„	„	1694,

sowie ein Supplement, enthaltend die Briefe, welche sich während der Herausgabe noch vorfanden, ferner eine Appendix, enthaltend diejenigen, zu welchen die Antworten fehlten, darunter die Leibniz'; erstmals waren die Briefe 1727 (der letzte Band 1743) gesammelt in neun Duodezbändchen erschienen, ohne die neun Briefe an Malebranche.

Die ersten sechs Klassen, Bd. V—XXXVII, umfassen die theologischen Schriften, die siebente bilden die philosophischen mit Bd. XXXVIII, XXXIX und XL. In der achten Klasse sind die Werke aus den übrigen Wissenschaften vereinigt; wir heben hervor: in Bd. XLI die Logik Arnaulds *„La logique ou l'art de penser"*, in Bd. XLII die *„Nouveaux Elémens de Géométrie"*.

Zweites Kapitel.

Besprechung von Arnaulds mathematischen Arbeiten und deren Bedeutung.

Seine Thesen und die Logik von 1662.

Wir beginnen in chronologischer Reihenfolge mit Arnaulds mathematischen Thesen und lassen deren Wortlaut hier folgen. Dieselben wurden, wie wir schon im ersten Teile ausführten, am 25. Juli 1641 vor der Sorbonne verteidigt.

Ex Mathematicis.

I. *Male profecto de Philosophia meritus, qui ab illius studio mathematicum pulverem*[1]) *eiecit. Obscuritas, quae multos deterret, saepe non doctrinae, sed Doctoris. Nec immerito Ptolemaeus Rex ab Euclide postulavit compendiariam magis ad geometriam viam, quam eius Elementorum. Vera quidem illic omnia, sed ordine praepostero plerumque tradita. Res per se clarissimae nimio demonstrandi studio obscuriores redditae. Innumera non aliunde probata, quam ab impossibili, quod ἐπιστημικόν non est. Probationes denique fere omnes extrinsecus adductae non ex natura figurarum.*

II. *Rectam datae rectae aequalem describere non problematis locum habere debet, sed postulati. Omissum in Elementis angulorum aequalium axioma infinitam obscuritatem peperit. Angulorum ad basim aequalitas in triangulo aequicruro vitiose admodum ab Euclide vel Theone demonstratur. Quod in 16. et 17. Prop. lib. I traditur ab Histerologia non potest excusari. Duo trianguli latera reliquo esse maiora, notius per se est quam Euclidis demonstratione. Quod aequalis altitudinis et basis parallelogramma sint*

---

1) *pulvis mathematicus* der grüne Glasstaub oder Sand, worin die antiken Mathematiker mit einem Stäbchen ihre Figuren zeichneten, daher fig. für die Wissenschaft selbst auch *pulvis eruditus* an mehreren klassischen Stellen, vgl. Heinichen, *Lat. Wörterbuch* Art. *pulvis*.

aequalia, sine ullis triangulis et trapeziis, ex sola parallelogrammi natura demonstrari potest. Nullus est angulus contactus; et rectus est angulus semicirculi.

III. *Astronomia geometriae soboles revolutionum coelestium leges, mundanorumque corporum situm et ordinem contemplatur. Ut perfecta sit, non solius calculi, sed etiam naturae tactionem habere debet. Systema Ptolemaicum undique vitium facit. Si lunam excipias errorum omnium sol centrum est. Circa terram volvitur luna sphaerica, opaca, et prorsus obscura. Laevem et perfecte politam non esse, sed scaprosa admodum et aspera superficie non modo telescopium ostendit, sed etiam opticae rationes evincunt.*

IV. *Quod terram in mundi centro immotam stare credamus, magis auctoritati quam rationi debemus. Nullis siquidem hactenus argumentis vel astronomicis vel physicis immobilitas terrae demonstrata est. Vana sunt praesertim, quae vulgo desumi solent a motu gravium ad perpendiculum cadentium: inanis etiam metus ne per terrestrem vertiginem aedificia corruerent, ne aves nidos suos repetere non possent. Non minus terra lunam illustrat quam luna terram; et eadem, eiusdemque periodi, phasium in utraque varietas.*

Es ist, um zunächst von den astronomischen Sätzen zu reden, ein ehrendes Zeichen von Arnaulds geistiger Freiheit und seiner durch nichts einzuschüchternden Liebe zur Wahrheit, dafs er, der junge Kleriker, hier zwar in vorsichtiger Form, aber in unverkennbarer Weise sich für das Kopernikanische System entscheidet; denn der Satz *„Quod terram in mundi centro immotam stare credamus, magis auctoritati debemus, quam rationi. Nullis siquidem hactenus argumentis vel astronomicis vel physicis immobilitas terrae demonstrata est“* ist richtig betrachtet genau dasselbe wie Galileis *„E pur si muove“*[1]); und das im Jahre 1641, nachdem im Jahre 1633 erst Galilei von der römischen Inquisition verurteilt worden war und dessen Lehre nicht einmal als Hypothese auftreten sollte, *„quamvis hypothetice a se illam proponi simularet“*. Descartes hatte sich bekanntlich (s. Kuno Fischer Bd. I S. 207) die Herausgabe seines kosmologischen Werkes durch jenes Urteil verleiden lassen. Arnauld rügt offen die kindisch-lächerlichen Einwürfe der Gegner, dafs durch die Bewegung der Erde die Häuser einstürzen müfsten oder die Vögel ihre Nester nicht mehr finden könnten. Auch im übrigen sind Arnaulds astronomische Ansichten ganz vernünftig.

Die mathematischen Sätze beginnen mit einem Hinweis auf die Wichtigkeit mathematischer Schulung; sollte sich die Spitze des Wortes *„Male pro-*

1) Der Ausspruch *„E pur si muove“* wurde von Galilei nicht gethan, sondern von spätern Schriftstellern ihm in den Mund gelegt, bezeichnet aber sehr treffend Galileis Haltung.

fecto de Philosophia meritus, qui ab illius studio mathematicum pulverem eiecit" gegen Bacon richten, der die hohe Bedeutung der Mathematik in seinem System nicht zu würdigen verstand, sodafs erst unter Hobbes' Einfluſs jenes Einströmen und die enge Verknüpfung des mathematischen Elements mit den nach der Methode der Induktion betriebenen naturwissenschaftlichen Forschungen stattfand, welche in Newton ihre höchste Blüte und Vollendung erreichte? Schon hier setzt Arnaulds Euklidkritik ein, welche in seinen folgenden mathematischen Schriften einen immer pronoucierteren Charakter erhält und als positives Ergebnis unter Pascals direktem Einfluſs sein geometrisches Hauptwerk entstehen läſst. Schon einmal, ein Jahrhundert früher, hatte ein Mann von *„streitbarer Geistesveranlagung"*, Petrus Ramus, in seinem Kampfe gegen die aristotelisch-scholastische Schule seine Angriffe gegen Euklid gerichtet. Aber die Zeit, welche ein wirklich neues und inhaltsvolles System der Elementargeometrie bringen sollte, war damals noch nicht gekommen. So blieb es von Seiten dieses Mannes bei unreifen Versuchen (vgl. S. 226). Die reformatorische Stellung gegen den groſsen griechischen *„Elementenschreiber"* prägt sich schon scharf in der kühn originalen Weise aus, in welcher Arnauld die bekannte Antwort Euklids auf die Frage des Ptolemaeus negiert: *„Nec immerito Ptolemaeus Rex ab Euclide postulavit compendiariam magis ad Geometriam viam quam eius Elementorum."* Arnauld glaubt jenen geraden Pfad zu kennen. Wahr sind die Ergebnisse Euklids, aber eine natürliche, ungezwungene Architektonik des Gebäudes der Elementargeometrie erscheint unserm Autor unbedingt notwendig, und diese vermiſst er bei dem Griechen. Dinge, welche an sich klar seien, also durch unmittelbare Anschauung einleuchteten, seien durch einen blinden Beweiseifer nur verdunkelt worden. Wenn M. Cantor in seinen *„Vorlesungen"* Bd. I S. 209 sagt, *„daſs die Alten sich der apagogischen Beweisführung, dieser indirekten Methode der Zurückführung auf das Gegenteil (namentlich bei sogenannten Exhaustionen immer, wo nur die synthetische Hypothese des Unendlichkleinen als Ersatz zu dienen vermag), wenn auch nicht gerade überwiegend, doch viel häufiger als die modernen Geometer bedienten, ja daſs in neuerer Zeit die indirekten Beweise nicht beliebt sind"*, so sehen wir hier, daſs Arnauld derjenige war, welcher wohl zum ersten Male dieser Abneigung klaren Ausdruck gegeben hat: *Innumera non aliunde probata quam ab impossibili, quod ἐπιστημικὸν non est.* *„Der Grund liegt darin"*, fährt M. Cantor l. c. erläuternd fort, *„daſs bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirekte Beweis der Einbildungskraft keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht-D eine Koexistenz von D zu-*

lassen, und nur schwer giebt sie sich gefangen, dafs wirklich die Einteilungsteile des Einteilungsganzen vollständig erschöpft wurden, dafs wirklich zwei sich ausschliefsende Thatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können." Sodann beanstandet Arnauld, dafs Euklid seine Beweise vielfach mit Hilfe fremder Bestandteile (*extrinsecus*), nicht aus der Natur der betreffenden Figur heraus führe. Im zweiten Absatz der Thesen wird die Kritik noch etwas weiter spezialisiert. Eine einer gegebenen gleiche Strecke abzutragen, müsse als Forderung, als Postulat eingeführt werden, da der Charakter einer Aufgabe, eines Problems hier nicht vorliege. Die Gleichheit der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks werde von Euklid oder vielmehr Theon so gut wie fehlerhaft bewiesen. Arnauld denkt wohl hier an das nach seiner Ansicht vergessene Axiom über die Gleichheit zweier Winkel ($\gtrless$ als ein Rechter); zu den an sich evidenten Wahrheiten rechnet er den Satz, dafs die Summe zweier Seiten im Dreieck gröfser ist als die dritte. Dahin gehört nach ihm auch der Satz von der Flächengleichheit von Parallelogrammen gleicher Höhe und Basis. Mit dem letzten Satze: „*Nullus est angulus contactus, sed rectus est angulus semicirculi*" nimmt Arnauld Stellung zu einer wichtigen Frage, zu der über den Contingenzwinkel. Mit diesem gemischtlinigen Winkel, dem Winkel zwischen Tangente und Kreis, hat sich Euklid III 16 beschäftigt und daselbst bewiesen, dafs dieser kleiner ist als irgend ein geradliniger spitzer Winkel. Die Bezeichnung *angulus contingencie* tritt bei Jordanus Nemorarius im geometrischen Werke „*De triangulis*" im dritten Buche auf. Von da an hat er die Mathematiker fortwährend beschäftigt. Wir finden den Contingenzwinkel wieder bei Johannes Campanus erörtert, der Euklids Ansicht teilt. Ende des XVI. Jahrhunderts entbrannte über die Natur des Contingenzwinkels eine heftige Meinungsverschiedenheit. Der Franzose Jacques Peletier oder Peletarius hatte in seiner Euklidausgabe von 1557 erklärt, der in Rede stehende Winkel sei gar nicht als Winkel zu betrachten; er sei ein Nichts, und der Winkel, welchen der Halbkreis mit dem Durchmesser bilde, sei von einem Rechten nicht im mindesten verschieden. Peletarius hatte in scharfsinniger Weise seine Ansicht durchgeführt. Ein Gegner fand sich in dem Jesuitenpater Clavius. Dieser sagte in der von ihm veranstalteten Ausgabe Euklids (III. Ausgabe 1591), dafs damit ein neues Ergebnis nicht erzielt worden sei, denn Euklid hätte eben dann einfach III 16 bewiesen, dafs das Nichts kleiner sei als ein spitzer Winkel. Vielmehr müsse man annehmen, dafs der Contingenzwinkel wohl eine gewisse Gröfse, ein Etwas sei, aber ein Winkel anderer Art als der geradlinige. Damit war aber der Streit nicht beendigt; es bildeten sich zwei förmliche Parteien. Der Ansicht Peletiers pflichteten in der Folge

die ersten Mathematiker bei. Vieta vertritt sie mit einer neuen Beweisführung in seinem *„Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII."* Dort heifst der Contingenzwinkel *cornicularis*. John Wallis gab 1656 eine Abhandlung heraus: *„De angulo contactus et semicirculi tractatus"*, worin er den Contingenzwinkel, einen *non-angulum*, ein *non-quantum* nennt. Dies veranlafste eine Entgegnung in der *Cyclomathia* des Leotaud (1662). Wir sehen aus dem Satze: *„Nullus et angulus contactus, et rectus est angulus semicirculi"*, dafs Arnauld dieselbe Überzeugung hat wie Peletarius, wie Vieta, wie Wallis. Die besprochenen Sätze sind zum grofsen Teile noch näher ausgeführt im IV. Abschnitt von Arnaulds Buch *„La Logique ou L'Art de penser"*, das wir schon im ersten Teile vorliegender Arbeit angekündigt und charakterisiert haben. Dieser IV. Abschnitt handelt von der Methode im allgemeinen und speziell von der der Geometer. In dem *„Discours sur le dessin de cette Logique"*, welcher dem ganzen Buche vorausgeht, sagt der Verfasser, dafs er besonders im vierten Abschnitt eine kleine, bis dahin nicht gedruckte Schrift eines ausgezeichneten Geistes mit verarbeitet habe, die von jenem betitelt worden sei: *„De l'esprit géométrique"*; hier also in Arnaulds *Logik* von 1662 ist Pascals gröfseres Fragment über die *„Methode der geometrischen Beweisführung"* zuerst genannt und der Inhalt veröffentlicht worden. Wir legen der Übersicht über den ganzen für die Geschichte der Mathematik bemerkenswerten IV. Abschnitt die erste, sehr seltene Ausgabe von 1662 zugrunde. Das erste Kapitel handelt von der analytischen und der synthetischen Methode. Arnauld beginnt mit der Definition der Methode im allgemeinen: *„Es ist Methode: Die Kunst, eine Folge von Gedanken wohl anzuordnen, sei es um die Wahrheit zu entdecken, wenn wir noch nicht im Besitz derselben sind, sei es um eine Wahrheit andern zu beweisen, wenn wir sie schon kennen."* Dem ersten Falle entspricht die analytische Methode, *méthode de resolution* oder *méthode d'invention*, dem zweiten die synthetische, *méthode de composition* oder *méthode de doctrine*. Bei der analytischen setzt man voraus, dafs das Gesuchte nicht vollständig bekannt ist, aber dafs man darauf kommen kann, indem man die Angaben darüber ins einzelne prüft und das Ergebnis dieser Prüfung benützt, um zu dem Gesuchten zu gelangen. Bei beiden Methoden aber ist Grundregel, von dem Bekannteren zum weniger Bekannten fortzuschreiten; dieser stillschweigenden Annahme mufs sich jede wahre Methode fügen. Was aber die analytische von der synthetischen Methode unterscheidet, ist, dafs man zu bekannten Wahrheiten durch die eingehende Prüfung des Gegenstandes gelangt, und nicht wie bei der synthetischen gleich zu Anfang allgemeinere Wahrheiten etabliert, aus denen man die Wahrheit seines speziellen Objektes herleitet. Als treffendes Bei-

spiel wird die Genealogie einer Person durchgeführt. Hieraus ergiebt sich sehr einfach, wie die Geometer verfahren, wenn ihnen eine Frage vorgelegt wird, deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit im Falle eines Theorems, deren Möglichkeit oder Unmöglichkeit im Falle einer Aufgabe sie nicht kennen. Sie nehmen also an, die Sache sei so, wie behauptet wird; darauf ziehen sie die notwendigen Konsequenzen daraus und schliefsen, dafs die vorgelegte Behauptung richtig bezw. eine verlangte Aufgabe möglich ist, wenn unter diesen notwendigen Konsequenzen eine evidente Wahrheit sich befindet: wenn aber dieses Verfahren auf eine Absurdität oder Unmöglichkeit führt, so war jene erste Annahme von der Richtigheit falsch oder vielmehr der Satz ist unrichtig oder die betreffende Aufgabe ist unmöglich. Hatte der so eingeschlagene Weg ein positives Ergebnis, so gehen die Geometer beim Beweis eines Satzes oder der Möglichkeit einer Aufgabe von jener Wahrheit aus, zu der sie das analytische Entdeckungsverfahren geführt hatte, und liefern ihn durch die entgegengesetzte, die synthetische Methode. Die Auffindung einer Wahrheit durch Analysis sei mehr Sache einer gewissen Urteilskraft und Geschicklichkeit, als bestimmter Regeln. Zur Vermeidung des Irrtums, so fährt Arnauld fort, leisteten aber jene vier von Descartes aufgestellten Regeln sehr gute Dienste:

1) *Man solle nie etwas für wahr halten, an dem man diese Eigenschaft nicht evident erkennt, d. h, sich sorgfältig vor Überstürzung oder Vorurteil hüten und nur solche Bestandteile in seine Urteile aufnehmen, die sich so klar dem Geiste darstellen, dafs man keinen Grund hat, daran zu zweifeln.*

2) *Jede Schwierigkeit in so viele Parzellen auflösen, als überhaupt möglich oder doch zu ihrer Überwindung notwendig sind.*

3) *Seine Gedanken in Ordnung so reihen, dafs man mit den einfachsten und leicht erkennbarsten Gegenständen beginnt und stufenweise zu den zusammengesetzteren aufsteigt, indem man selbst unter denjenigen eine Ordnung voraussetzt, welche auf den ersten Anschein sich nicht zwanglos zu folgen scheinen.*

4) *Überall so vollständige Aufzählungen machen und so allgemeine Übersichten geben, dafs man sicher sein darf, nichts vergessen zu haben.*

Freilich stellen sich der Anwendung dieser Regeln vielfach Schwierigkeiten entgegen, aber ihre bestmöglichste Anwendung garantiert auch eine weitgehende Sicherheit bei der Erforschung der Wahrheit, soweit sie der Vernunft erkennbar ist.

Im zweiten Kapitel wird nochmals speziell auf die synthetische Methode der Geometer eingegangen. Durch die Voranstellung allgemeinster und einfachster Wahrheiten vermeidet man Wiederholungen, die unfehlbar eintreten müfsten, wollte man die Arten vor der Gattung behandeln. Die geo-

metrische Methode ist die überzeugendste und sie befriedigt zugleich den Intellekt vollständig. Die Geometer wollen nur vollständig überzeugende Resultate zutage fördern und glauben dies durch Beobachtung der folgenden Regeln zu erreichen:

1) *Man lasse keinerlei Zweideutigkeit in den Bezeichnungen bestehen (ne laisser aucune ambiguité dans les termes).*

2) *Man stütze seine Überlegungen nur auf klare und evidente Prinzipien, die von niemand bestritten werden können (n'establier leurs raisonnemens que sur des principes clairs et évidens);* deshalb legen die Geometer vor allem ihre Axiome fest und verlangen, daſs man ihnen einräume, diese seien so klar, daſs sie durch Beweisversuche nur verdunkelt werden könnten.

3) *Man beweise alle seine Schlüsse demonstrativ (prouver demonstrativement toutes les conclusions qu'ils avancent), d. h. man benütze dazu nur die ausgesprochenen Definitionen, die zugestandenen Prinzipien oder Axiome und die hieraus durch Denkkraft hergeleiteten Sätze, welche so brauchbar wie die Axiome selbst für die weitere Beweisführung sind.*

Dieses sind die drei Hauptsätze; sie lassen sich weiter ausführen in fün— anderen. Es folgen die fünf positiven Vorschriften Pascals, die M. Canto— unter 2, 3, 5, 7, 8 in seinen *„Vorlesungen"* Bd. II S. 682 wiedergegebe— hat. Wir benützen zu ihrer Aussprache M. Cantors Übersetzung:

Für die Definitionen.

1) *Man soll keinen dunkeln oder Zweifel gestattenden Ausdruck oh Definition lassen.*

2) *Man soll bei den Definitionen nur solcher Wörter sich bedienen, wel entweder vollkommen bekannt sind oder vorher ihre Erklärung gefunden hab*

Für die Axiome.

3) *Man soll als Axiome nur Dinge aufstellen, die an sich vollkomm einleuchtend sind.*

Für die Beweise.

4) *Man soll jeden Satz beweisen, dem irgend Dunkelheit anhaftet, als Beweismittel nur sehr einleuchtende Axiome oder vorher schon Bewies bezw. Zugestandenes anwenden;* bei Arnauld:

4) *Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant leur preuve que les definitions qui auront précédé, ou les axiomes qui aur esté accordez, ou les propositions qui auront déjà esté demontrées, ou la con struction de la chose mesme dont il s'agira, lors qu'il y aura quelque operation à faire.*

5) *Man soll fortwährend in Gedanken das Definierte durch seine Definition ersetzen, um nicht vermöge des vielfachen Sinnes von Wörtern, die*

innerhalb der Definitionen enger gefafst würden, zu Irrtümern verleitet zu werden.

Kap. III ist den Definitionen gewidmet. Schon im ersten Abschnitt war mit Beziehung auf Pascal in Kap. X der Unterschied zwischen Verbal definition (*définition du nom, definitio nominis*) und der Realdefinition (*définition de la chose, definitio rei*) klargestellt worden. Die Nominaldefinitionen sind willkürlich und unanfechtbar und deshalb kann eine solche Definition die Stelle eines Prinzips vertreten. Dagegen hat eine Realdefinition durchaus den Charakter eines Theorems, das bewiesen werden mufs wie jeder Satz, und nur wenn jene an sich klar und evident ist, tritt sie als Axiom, als Prinzip auf. Natürlich müsse man dem Gegenstand einer Nominal definition nicht ohne weiteres Realität zuschreiben. Sehr oft würden Realdefinitionen aufgestellt, die sehr anfechtbar seien, von denen aber ihre Urheber durch Verwechslung glaubten, es seien Nominaldefinitionen, mithin Prinzipien, und man könne auf die Gegner derselben den Grundsatz anwenden: *contra negantem principia non est disputandum*, Deshalb sei es notwendig, gleichsam eine neue Sprache zu schaffen, indem man die gebräuchlichen Bezeichnungen ihrer Bedeutung ganz und gar entkleide. So könne man z. B. das Wort Parallelogramm, so paradox es klinge, für eine dreiseitige Figur gebrauchen, deren Winkelsumme zwei Rechten gleich sei, wenn man nur an der Bezeichnung konsequent festhalte, d. h. eine bestimmte, wohlunterschiedene Idee eindeutig dadurch fixiere. Wem fiele hier nicht Pascals souveräne Bezeichnung *„antobola"* für Ellipse ein, die in seinen Kegelschnittfragmenten wohl aus Gründen der Symmetrie mit *hyperbola* und *parabola* durchgeführt ist? Durch vernachlässigte oder nicht eindeutige Nominaldefinitionen bringen es viele sogenannte Philosophen zu stande, mit Hilfe der klaren Idee einer Sache unklare und verworrene Seiten derselben Sache zu verfechten. Auch zur Abkürzung von langen Definitionssätzen dient eine Nominaldefinition, und dies ist ein nicht zu gering anzuschlagender Vorteil einer passend gewählten kurzen Bezeichnung gerade in geometrischen Abhandlungen. Diese Dinge werden im dritten Kapitel des vierten Abschnitts wieder aufgenommen, exemplifiziert und an speziellen historischen Beispielen belegt. So definiere Euklid den ebenen geradlinigen Winkel als: *Zusammentreffen zweier geneigter Geraden in derselben Ebene (La rencontre de deux lignes droites inclinées sur un même plan)*. Gegen diese Nominaldefinition [illegible] wenden; aber Euklid hat [illegible] ist in die natürliche Konstruktion [illegible] stitution des Definiens [illegible] mancherlei Absurditäten [illegible]

halbiere, so werde nicht das *„Zusammentreffen zweier Geraden“* halbiert. Auch hätte dieses keine Schenkel und keine Basis, sondern alle diese Eigenschaften kämen dem eingeschlossenen ebenen Winkelraum zu. Euklid sei wohl abgeschreckt worden, den ebenen Winkelraum einzuführen dadurch, daſs dieser gröſser oder kleiner sein könne, ohne daſs der Winkel selbst sich ändere. Gebrauche man dagegen folgende Definition: *Der Winkel ist ein zwischen zwei sich schneidenden Geraden liegender Flächenraum, unbegrenzt hinsichtlich der Dimension, welche der Länge der Geraden entspricht, und begrenzt in Bezug auf die zweite Dimension durch den proportionalen Teil des Umfangs eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkt jener beiden Geraden zusammenfällt,* so sei diese Definition so hübsch und reinlich, daſs sie zugleich als Nominal- und Realdefinition gelten könne. Auf Grund dieser Definition lieſsen sich alle Eigenschaften des ebenen Winkels entwickeln, ohne daſs man nötig habe, in eine andere Vorstellung überzugehen. Besonders flieſse daraus mit Leichtigkeit der Begriff der Gleichheit zweier Winkel, der bei Euklid fehle, was schon Petrus Ramus bemerkt habe, ohne daſs diesem seine Verbesserungen sonderlich geglückt seien.

Ein zweites Beispiel von mangelhafter Nominaldefinition biete Euklids unklarer Verhältnisbegriff. Er definiert: *„La raison est une habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparées l'une avec l'autre selon la quantité; Proportion est une similitude de raison.“* Auch die Differenz zweier Gröſsen sei eine solche Gröſsenbeziehung zwischen ihnen. Euklid habe also seine Definition zu eng gefaſst, wenn bei ihm $3 \cdot 5 : 8 \cdot 10$ nicht als Proportion gelte. Er hätte also bemerken müssen, daſs man zwei Gröſsen auf zweierlei Arten vergleichen kann; dementsprechend seien zwei Bezeichnungen zu wählen: Differenz und Verhältnis. Ebenso hätte er die Proportion als Gleichheit zweier gleichartiger jener beiden Gröſsenbeziehnungen definieren müssen und auch hier wieder zwei Bezeichnungen auswerfen: Für Gleichheit von Differenzen: Arithmetische, für Gleichheit zweier Verhältnisse: Geometrische Proportion mit dem Zusatz, daſs letztere Gleichheit, weil sie wichtiger und häufiger sei, Proportion schlechthin heiſsen solle. Solchergestalt wäre alle Dunkelheit und Zweideutigkeit vermieden worden.

Kap. IV führt die Sache noch weiter. Nicht immer seien die Geometer sich bewuſst gewesen, daſs Nominaldefinitionen unbestreitbar seien. Der ganze Streit über den Contingenzwinkel zwischen Clavius und Peletier gehöre hierher. Mit einem Worte wäre er beendigt gewesen, hätte man sich darüber verständigt, was man eigentlich unter Winkel verstehen wolle. Derselbe Fehler sei von Simon Stevin, dem berühmten Mathematiker des Prinzen von Oranien, gemacht worden. Er habe definiert: *„Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose“* und

sei dann sehr aufgebracht gewesen gegen diejenigen, welche die Einheit nicht als Zahl bezeichneten. Allerdings sei in jenen Disput eine Frage eingemengt worden, welche vorweg auszuscheiden sei, nämlich, ob sich die Einheit zur Zahl verhalte wie der Punkt zur Strecke. Untersuche man jeden Teil der Kontroverse für sich, so müsse in Bezug auf den ersten die gemachte Nominaldefinition entscheiden. Für Euklid z. B., der definiere: *nombre est une multitude d'unitez assemblées,* sei allerdings die Einheit keine Zahl. Aber da dies eben eine Nominaldefinition und diese ganz beliebig sei, so könne man natürlich mit Stevin eine andere zu Gunsten der Einheit aufstellen. Aber damit sei die Sache erledigt und man könne nichts weiter gegen eine andere Definition einwenden, ohne sich einer *petitio principii* schuldig zu machen; wie man erkennt, wenn man die sogenannten Beweise Stevins genauer ansieht. Dieser schliefse:

„La partie est de mesme nature que le tout. Unité est partie d'une multitude d'unitez. Donc l'unité est de mesme nature qu'une multitude d'unitez.

Et par consequent nombre."

Dieses Argument beweist nichts, sagt Arnauld, ein Halbkreis ist kein Kreis, der Teil eines Quadrats kein Quadrat.

Ebensowenig besage der andere Versuch Stevins:

„Si du nombre donné l'on oste aucun nombre, le nombre donné demeure. Donc si l'unité n'estoit pas nombre, en ostant un de trois, le nombre donné demeuroit, ce qui est absurde."

Arnauld findet den Obersatz lächerlich, denn er setze voraus, was bewiesen werden soll. Euklid müfste ihn leugnen, denn nach seiner Definition brauche er nur die Einheit zu subtrahieren, um ihn zu widerlegen. So könne man auch beweisen, dafs ein (ganzer) Kreis bleibe, wenn man einen Halbkreis abziehe, weil man keinen (ganzen) Kreis abgezogen habe. Es besagen Stevins Argumente also höchstens, dafs die Ähnlichkeit zwischen der Einheit und einer Mehrheit von Einheiten genügend sei, um für beide eine Kollektivbezeichnung einzuführen. Das hänge aber vom Belieben ab und deshalb war Stevins ganze Kontroverse ein Wortstreit. Seine Bücher seien voll derartiger Wortstreitigkeiten, indem er sich an anderer Stelle bemühe darzuthun, die Zahl sei keine diskrete Menge, die Proportion der Zahlen sei immer arithmetisch, nie geometrisch, jede Wurzel einer beliebigen Zahl sei eine Zahl. Die zweite anfangs ausgeschiedene Frage aber sei von ganz anderer Natur. Da handle es sich um eine Realdefinition und die Behauptung: *Die Einheit verhalte sich zur Zahl wie der Punkt zur Strecke* sei ganz und gar falsch. Denn die Addition der Einheit vergröfsere die Zahl, während der Punkt an der Strecke dies nicht bewirke. Wir haben

nur deshalb die Streitfrage so eingehend wiedererzählt, weil sie eine gewisse Etappe bildet in der fortwährenden Erweiterung des Zahlbegriffs, der von Stevin hier auf die Irrationalen ausgedehnt wird, und deshalb für die Entwicklungsgeschichte einfacher Begriffe der heutigen Mathematik interessant ist.

Im V. Kapitel wird die Natur der Axiome beleuchtet. Alle Welt sei einig darüber, dafs es an sich evidente Sätze gäbe, welche nicht bewiesen werden könnten. Solche Prinzipien müssen das Fundament einer richtigen Beweisreihe bilden. Viele aber seien sich nicht recht bewufst, worin die Evidenz besteht; sie glauben, dafs der Widerspruch irgend eines Menschen einen Beweis nötig mache. Diese sind auf das Wort des Aristoteles zu verweisen, dafs ein Beweis nur die innere, nicht die äufsere Zustimmung verlange. Es folgt ein Exkurs gegen die Sensualisten; deren Behauptung, dafs alle Gewifsheit aus den Sinnen und der Erfahrung stamme, widerlege sich selbst, da die Erfahrung nur unvollständige Induktionen liefere, zur Gewifsheit aber vollständige notwendig seien. Als Beweis führt Arnauld die neu entdeckte Kapillarität ins Feld, die, eine neue Erfahrung, die alten umstofse. Auf der klaren und distinkten Idee des Ganzen und der des Teils beruht allein die Evidenz des Axioms: *Das Ganze ist gröfser als sein Teil.* Wir haben schon im ersten Teil der vorliegenden Arbeit Arnaulds rationalistischen Standpunkt gekennzeichnet. So folgt denn hier eines der rationalistischen Grundprinzipien: *„Alles, was in der klaren und distinkten Idee einer Sache enthalten ist, kann in Wahrheit von dieser Sache behauptet werden."* Solche Grundwahrheiten, wie: *„Das Ganze ist gröfser als sein Teil"* können nicht bezweifelt werden, denn man kann sie nicht bezweifeln, ohne sie zu denken, ohne sie für wahr zu halten. Nun aber gelangt Arnauld zu einer Schwierigkeit, die offenbar durch die Parallelentheorie und deren logische Bedeutung in ihm angeregt worden ist: Es giebt gewisse Eigenschaften von Dingen, die in deren klarer Idee enthalten sind, die aber bewiesen werden können und bewiesen werden müssen. Die Verwendbarkeit gewisser Sätze als Axiome ist durch die beiden folgenden Vorschriften geregelt, die wir im Texte wiedergeben:

1. Regel. *Lorsque pour voir clairement qu'un attribut convient à un sujet, comme pour voir qu'il convient au tout d'estre plus grand que sa partie, on n'a besoin que de considerer les deux idées du sujet et de l'attribut avec une médiocre attention en sorte qu'on ne le puisse faire sans s'appercevoir que l'idée de l'attribut est veritablement enfermée dans l'idée du sujet: on a droit alors de prendre cette proposition pour un axiome qui n'a pas besoin d'estre demontré, parce qu'il a de luy mesme toute l'évidence que luy pourroit donner la demonstration, qui ne pourroit faire autre chose sinon*

démontrer que cet attribut convient au sujet, en se servant d'une troisième idée pour montrer cette liaison ce qu'on en voit déjà sans l'aide d'aucune troisième idée.

Dabei dürfe man aber Erklärung und Beweis nicht verwechseln; denn manche Axiome müssen erklärt, d. h. mit immer anderen Worten ausgesprochen werden, um verständlich zu sein, während ein Beweis ein ganz neues Moment (*troisième idée*) einführt.

2. Regel. *Quand la seule consideration des idées du sujet et de l'attribut ne suffit pas pour voir clairement que l'attribut convient au sujet, la proposition qui l'affirme ne doit point estre prise pour axiome, mais elle doit estre demontrée, en se servant de quelques autres idées pour faire voir cette liaison, comme on se sert de l'idée des lignes paralleles pour montrer que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits.*

Die beiden Regeln seien von hervorragender Wichtigkeit; denn die meisten Menschen pflegen in der Befragung ihres logischen Gewissens nicht gewissenhaft genug zu sein.

Das folgende Kapitel zählt einige solche allgemeinste Axiome auf.

An erster Stelle steht der Satz des Widerspruchs, dem aber Arnauld keine grofse praktische Bedeutung zuerkennt. Dann folgen Axiome, die wir wegen des allzuengen Zusammenhangs mit Descartes' Körperbegriff und dessen occasionalistischer Ausläufer hier nicht anführen. Hat Arnauld bisher in Kap. III und IV die Regeln Pascals über die Definitionen näher erläutert, in Kap. V den Begriff des Axioms in Pascals oben wiedergegebenem Satz 3 eingehend untersucht, so kommt er in Kap. VI auf die Sätze 4 und 5 Pascals über die Beweise. Bei einem Beweise mufs sowohl die Materie wahr und unzweifelhaft sein, als auch die Form des Argumentierens richtig. Das erstere tritt ein, wenn man nach Pascals viertem Satze nur Nominaldefinitionen, nur Axiome und bewiesene Sätze, sowie Konstruktionen verwendet, deren Möglichkeit vorher demonstriert wurde. Die fünfte Regel (zweiter Satz über den Beweis) Pascals gewährleistet die Richtigkeit der Form, sie verhindert, dafs man sich gegen die Regeln des Syllogismus vergeht, was meistens nur dadurch geschieht, dafs in den Ober- und Untersatz eine mehrdeutige Begriffsbildung eingeht. Andre Fehler aber können einem normalen Verstande in der Form nicht leicht begegnen, wie sich die Geometer nicht darum kümmern, ob ihre Überlegungen immer genau den Schablonen des Schlusses angepafst sind. Man braucht somit 1) bei evidenten Sätzen nicht immer zu wiederholen, warum sie es sind, d. h. den rationalistischen Grundsatz anzuführen, dafs alles, was in der klaren und distinkten Idee einer Sache enthalten ist, in Wahrheit von ihr gilt. Und 2) gilt, was von der Gattung bewiesen ist, ohne nochmaliges Schlufsverfahren von deren Arten.

„Obwohl es bewundernswert im höchsten Grade sei", beginnt Arnauld das VIII. Kapitel, *„dafs auf Grund dieser fünf einfachen Regeln die Geometer soviele verborgene Wahrheiten entdecken und sie durch unzerbrechliche Beweise sichern konnten, obwohl sie unter den Philosophen die einzigen seien, die aus ihrem Hause und aus ihren Schriften Wortzänkereien und Dispute im allgemeinen verbannt hätten, und es bei den Geometern stehender Grundsatz sei, nur Überzeugendes und Unbestreitbares zu behaupten, so müsse man doch hinzufügen, dafs einige Fehler übrig geblieben seien, welche sie zwar nicht von ihrem Ziele abhalten, aber doch schuld sind, dafs sie es nicht auf dem kürzesten und bequemsten Wege erreichen."*

Wir folgen bei deren Aufzählung wieder Arnaulds Text:

I. *Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que d'éclairer.*

In der vollendeten Wissenschaft ist es nicht genug zu beweisen, dafs etwas so ist, sondern durch Gründe, welche der Natur der Sache entnommen sind, ist darzuthun, warum es so ist. Erst dann ist der Intellekt befriedigt.

II. *Prouver des choses, qui n'ont pas besoin de preuves.*

Wir haben schon anläfslich der Thesen hiervon gesprochen. Der Satz, die Summe zweier Seiten ist im Dreieck gröfser als die dritte, sei ebenso evident und intuitiv, wie die natürliche Notion der geraden Linie als des kürzesten Wegs und des natürlichen Distanzmafses zweier Punkte. Die Bestimmtheit einer geraden Linie durch zwei Punkte sei in der klaren und distinkten Idee der Geraden enthalten, ebenso dafs jeder Punkt einer Geraden von zwei festen Punkten einer andern Geraden gleich weit absteht, wenn zwei Punkte der ersteren diese Eigenschaft besitzen. So gelangt man zum Begriff der Senkrechten. Die Senkrechte ist aber das natürliche Mafs der Distanz eines Punktes von einer Geraden. Wenn dann zwei Punkte einer Geraden gleiche Distanz von einer andern Geraden haben, so sind alle Punkte der ersteren von der zweiten ebensoweit entfernt; man bezeichnet die beiden Geraden als parallel; so ist Arnaulds Auffassung hier vom Parallelismus. Diese Vorstellungen seien ebenso klar wie das Grundprinzip Archimeds, dafs von Curven, die in denselben beiden Punkten endigen, die eingeschlossene immer die kürzere sei.

Jene Beweissucht sei ja an und für sich nicht so schlimm, aber sie ist es, die an Stelle eines natürlichen Aufbaus Verwirrung hervorbringt.

III. *Demonstration par l'impossibilité.*

Wir haben eingehend Arnaulds Stellung zum apagogischen Beweis kennen gelernt; hier präzisiert er sie dahin, dafs man ihn gelten lassen könne in negativen Corollaren oder mehr an Stelle einer Erläuterung;

wahre Berechtigung besitze er nur, wenn kein direkter positiver Beweis möglich sei.

IV. *Demonstrations par des voyes trop eloignées.*

Auch dieser Beweisfehler wurde in den Thesen schon erörtert. Ein Beispiel sei Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes I 47. Die benützten Dreiecke seien der Sache ganz fremd, und der einzige natürliche Weg der durch Proportionen, mit einer einzigen Hilfslinie, der Senkrechten aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse.

V. *N'avoir aucun soin du vraye ordre de la nature.*

Arnauld gerät hier in Feuer. Dies ist ja auch das Hauptfeld seiner Kritik. Die Geometer glaubten, keine weitere Ordnung einhalten zu müssen, wenn nur die folgenden Sätze durch die vorhergehenden bewiesen würden. Statt sich um die Regeln der wahren Methode zu kümmern und vom Einfachsten und Allgemeinsten zum Zusammengesetzteren und Spezielleren fortzuschreiten, werfen sie Linien und Oberflächen durcheinander, ebenso Dreiecke und Quadrate, und beweisen die Eigenschaften einfacher Linien mit Hülfe von Figuren, wodurch die schöne Wissenschaft der Geometrie so ungemein entstellt wird. Man müfste den ganzen Euklid abschreiben, um alle die Beispiele beisammen zu haben. Nachdem dieser in den vier ersten Büchern von der Ausdehnung gehandelt, behandle er im fünften Buche die Proportionen an Gröfsen jeder Art. Er nimmt die ausgedehnten, d. h. räumlichen wieder auf im sechsten, bringt die Zahlen im siebenten, achten und neunten, und fängt im zehnten nochmals wieder von der Ausdehnung zu sprechen an. Das ist seine Unordnung im grofsen, im speziellen aber lehrt er z. B. zu Beginn des ersten Buches die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, während erst zweiundzwanzig Sätze weiter unten die allgemeinere Konstruktion eines beliebigen Dreiecks aufgenommen wird. Seine Beweise über Senkrechte und Parallele sind alle durch Vermittlung von Dreiecken geführt, und so die lineare Dimension mit Gebilden zweier Dimensionen bunt durcheinander gemengt. Auch die Stellung des für die Parallelentheorie wichtigen Satzes I 16 und dessen Wiederaufnahme sechszehn Sätze später bemerkt Arnauld mit Unwillen.

VI. *Ne se point servir de divisions et de partitions.*

Die Geometer geben für die Arten einer Gattung nur Nominaldefinitionen und stellen sie beliebig nebeneinander, statt zu bemerken, dafs eine Gattung so viele Arten hat und nicht mehr haben kann, weil ihre Idee nur gerade soviele verschiedene Spezialisierungen zuläfst.

Es folgt ein Schema für die Dreiecke. Wir geben es wörtlich wieder:

Le triangle se peut diviser selon les costez, ou selon les angles.

Car les costez sont

Ou { *tous égaux et il s'appelle . . . Equilatère*
deux seulement égaux s'appelle Isoscele
tous trois inégaux s'appelle . . Scalene.

Les angles sont

Ou { *tous trois aigus, et il s'appelle Oxigone*
deux seulement aigus, et alors le 3. est

Ou { *droit, et il s'appelle . . . . . Rectangle*
obtus, et il s'appelle . . . . . Amblygone.

Am besten giebt man diese Einteilung erst, wenn die allgemeinen Eigenschaften des Dreiecks entwickelt sind, weil man dann ihren notwendigen und hinreichenden Charakter erkennt. Man definiert also die Arten erst nach Charakterisierung der Gattung, ein Vorteil, der sich besonders da geltend macht, wo innerhalb des Gattungsbegriffs die Anzahl der *differentiae specificae* relativ klein ist.

Kap. IX giebt die Erwiderung der Geometer, um in dieser Form nochmals die Vermeidung jener sechs Methodenfehler anzuraten. Arnauld sagt: Es giebt Geometer, welche glauben, dafs die Sache erledigt sei, wenn sie erklären über jene Ausstellungen zur Tagesordnung überzugehen, da ihre einzige Absicht sei, durch überzeugende Beweise die Wahrheit festzustellen, gleichviel auf welchem Wege. Man mufs ja zugeben, dafs jene sechs Punkte nicht verhindern konnten, dafs die geometrische Beweisführung besser ist als die aller anderen Wissenschaften, dafs kein Wissenschaftskomplex besser behandelt worden ist als der in der Gesamtbezeichnung *„Mathematik"* begriffene (*les sciences qui sont comprises sous le nom général de Mathematiques*), aber alles ist vervollkommnungsfähig, und wenn auch der einzige Zweck der Wissenschaft ist, die Wahrheit zu erforschen und festzustellen, so mufs sie doch auch dafür sorgen, dafs der Weg der natürlichste ist, auf welchem die Wahrheit ihren Einzug in den Geist hält. Es liegt im Wesen des Verstandes, dafs wir ein reinlicheres, vollständiges und vollendetes Wissen von dem bekommen, was wir durch seine wahren Erkenntnisgründe erfahren, als von auf entlegenen und gewundenen Wegen Erworbenem. Sodann erlernt man auch leichter, was in seiner natürlichen Folge gelehrt wird, weil die Ideen, welche eine natürliche Ordnung besitzen, sich in unserem Gedächtnis besser aneinanderreihen und sich leichter gegenseitig auslösen. Denn Dinge, deren wahren Grund man kennt, werden nicht mechanisch behalten, sondern jedesmal durch einen Urteilsakt reproduziert. Gerecht ist der Einwand, fährt Arnauld fort, dafs es besser sei, sich einer Inkonvenienz auszusetzen und die natürliche Ordnung zu vernachlässigen, als die Strenge der Beweise zu opfern. Er sei persönlich überzeugt, dafs beides vereinigt werden könne, und dafs es möglich sei,

eine Elementargeometrie zu liefern, wo alle Sätze in der natürlichen Ordnung sich folgen, alle Beweise auf den einfachsten Wegen und mit den einfachsten Mitteln geführt seien und doch der Kraft nicht entbehrten. Er glaube also den Regeln, die (von Pascal) schon gegeben seien, noch zwei oder drei hinzufügen zu müssen, die ebenso wichtig seien, weil sie die gebräuchliche Methode vervollkommneten.

Der Vollständigkeit wegen geben wir nochmals eine Zusammenstellung getreu dem Original; Arnauld bemerkt, daſs die erste und zweite dem I. Abschnitte, die dritte und vierte dem II., die fünfte und sechste dem III., die siebente und achte Regel, die methodologischen, Arnauld eigenen, dem IV. Abschnitt, der Methodologie, seiner Logik entsprechen.

La Methode des sciences reduite à huit regles principales.

Deux Regles touchant les definitions.

1°. *Ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou equivoques sans le definir.*

2°. *N'employer dans les definitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliquez.*

Deux regles pour les axiomes.

3°. *Ne demander en axiomes que des choses parfaitement evidentes.*

4°. *Recevoir pour evident ce qui n'a besoin que d'un peu d'attention pour estre reconnu veritable.*

Deux regles pour les demonstrations.

5°. *Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les definitions qui auront precedé, ou les axiomes qui auront esté accordez ou les propositions qui auront déjà esté demontrées.*

6°. *N'abuser jamais de l'equivoque des termes en manquant de substituer mentalement les definitions qui les restreignent et qui les expliquent.*

Deux regles pour la Methode.

7°. *Traiter les choses autant qu'il se peut dans leur ordre naturel, en commençant par les plus générales et les plus simples et expliquant tout ce qui appartient à la nature du genre, avant que de passer aux especes particuliers.*

8°. *Diviser autant qu'il se peut chaque genre en toutes ses especes, chaque tout en toutes ses parties, et chaque difficulté en tous ses cas.*

Arnauld fügt bei, daſs er schreibe *autant qu'il se peut*, weil gewisse Schwierigkeiten sich der strengen Durchführung entgegenstellen, z. B. müsse man vom Kreis in der Elementargeometrie handeln, ohne die Gattung, die

ebenen Curven, näher zu entwickeln, man müsse sich damit begnügen, sie zu definieren.

Wir haben aus dem Behandelten die Überzeugung gewonnen, dafs Arnauld neben und mit Pascal der Begründer der modernen Philosophie der Mathematik ist. Wir haben zugleich hier im IV. Abschnitt seiner *Logik* das Programm kennen gelernt für Arnaulds geometrisches Hauptwerk. Die Veranlassung zur Abfassung und Herausgabe, Pascals Anregung, den Inhalt, die Bedeutung und die Nachwirkung dieses Hauptwerkes, in welchem Arnauld die methodische Emanzipation von Euklids Elementen, diesem altersgrauen, ehrwürdigen Denkmal antiker Weisheit im Geiste einer Renaissance vollzogen hat, werden wir im nächsten Abschnitt auseinandersetzen.

Wir glauben die *Logik* Arnaulds von 1662 nicht verlassen zu dürfen, ohne darauf hingewiesen zu haben, dafs eines der nächsten Kapitel, welches von der Glaubwürdigkeit menschlicher Zeugnisse handelt und betitelt ist: *„Quelques regles pour bien conduire sa raison dans la creance des evenemens qui dependent de la foy humaine"*, noch mehr aber das Schlufskapitel des ganzen Buches: *„Du jugement qu'on doit faire des accidens futurs"* Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen enthält. Arnauld sagt an letzterer Stelle: *„Pour obtenir un bien, ou pour eviter un mal il ne faut pas seulement considerer le bien et le mal en soy, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas et regarder géometriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble. Ce qui peut estre eclairci par cet exemple."*

Das Beispiel ist das von zehn Spielern, wobei jeder einen Thaler einsetzt, jeder hat die Chance, neun Thaler zu gewinnen, aber die Wahrscheinlichkeit, den einen zu verlieren, ist neunmal so grofs als die, jene neun zu gewinnen, sodafs für alle ein voller Ausgleich eintritt. (Mathematische Hoffnung — Einsatz!) Ungerecht dagegen seien die Lotterien, da der Unternehmer gewöhnlich den zehnten Teil vorweg für sich beanspruche, sodafs die Gesamtheit der Losabnehmer in derselben Weise betrogen wird, wie wenn ein Mann in einem Spiele, wo die Möglichkeit des Gewinns so grofs ist wie die des Verlusts, zehn Pistolen gegen neun setzt. In dem gleichen Nachteil befindet sich aber auch der einzelne, weil er Glied der Gesamtheit der Spielenden ist.

Manchmal ist die Wahrscheinlichkeit des Verlustes, wie klein auch der Einsatz ist, so grofs, dafs es unvorteilhaft ist, jenen letzteren zu machen. So wäre es toll, zwanzig Sols gegen zwanzig Millionen Goldstücke zu wetten, dafs ein Kind, wenn es die Lettern einer Druckerei nebeneinandersetzt, zufällig die ersten Verse von Virgils *Äneis* trifft. Auch die oftmalige Wiederholung eines ungünstigen Umstandes geringerer Bedeutung

kann die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ausfalls der Hauptsache kompensieren oder gar in Unwahrscheinlichkeit umschlagen lassen. Scharf ist sich Arnauld der Bedeutung der *„Möglichkeit"* in geometrischen Wahrheiten und in Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen bewufst. Er sagt, wenn die Geometer wissen, dafs sich eine Curve durch vier oder fünf Bewegungen verschiedener Art beschreiben läfst, so kümmern sie sich nicht darum, ob jene Curve wirklich gezeichnet wird, sondern sie halten es für genügend, dafs dies möglich ist, um ihre Überlegungen daran zu knüpfen. Bei zufälligen Ereignissen aber bedingt die Möglichkeit derselben durchaus nicht die Annahme ihres Vorhandenseins oder Eintretens. Mit diesen im Texte sehr ausführlichen Betrachtungen hat Arnauld Leibniz' systematischer Unterscheidung der ewigen und thatsächlichen Wahrheiten vorgearbeitet.

Arnaulds mathematisches Hauptwerk, die Nouveaux Elémens de Géométrie. Entstehungsgeschichte, Pascals Einfluſs, Nachwirkungen.

Unter umstehendem Titel erschien 1667 die editio princeps von Arnaulds *Géométrie* in 4°. Wie die Wiedergabe des Titelblattes zeigt, erschien das Buch anonym; es ist in den modernen Bibliographien unter den *Anonyma* und *Pseudonyma* z. B. bei A. Barbier nicht verzeichnet.

In der Vorrede sagt der Verfasser, nachdem er den Nutzen der Geometrie für die Ausbildung der Urteilskraft betont, von sich und seinem Werke:

„Ce qui luy a donc faire croire qu'il estoit utile de donner une nouvelle forme à cette science est, qu'estant persuadé que c'estoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre estant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toûjours eu quelque peine de ce que les Elemens d'Euclide estoient tellement confus et broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goust de veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre et à la confusion.

Ce defaut luy paroissoit considerable dans une science dont la principale utilité est de perfectionner la raison; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier sans la rencontre que je vas dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands esprits de ce siecle, et des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un essay d'Elemens de Geometrie; et comme il n'avoit pas cette vüe de l'ordre, il s'estoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes et plus naturelles. Ce petit ouvrage estant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand esprit

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE;

CONTENANT,

Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables,

De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'eſtoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la To de Noſtre-Dame, à l'Enſeigne des trois Vertus.

M. DC. LXVII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

n'eust pas esté frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la méthode, et cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie, les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son esprit, et tout le corps de l'ouvrage que nous donnons maintenant au public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques uns de ses amis, que s'il avoit de loisir il luy seroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez . . ."

Für den Verfasser vorliegender Arbeit stand es fest, dafs mit den Worten: *Un des plus grands esprits de ce siecle, et des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques* niemand gemeint sein könne als Blaise Pascal. Den thatsächlichen Nachweis für diese Annahme zu führen, gelang aber erst nach langen Nachforschungen. Er wird erbracht durch folgende Stelle eines schwer zugänglichen Werkes. Im sechsten Bande S. 183–184 von Besoigne, *Histoire de l'abbage de Port Royal, à Cologne, aux depens de la Compagnie MDCCLII (seconde partie)* heifst es:

„*Il a bien paru, qu'il (Arnauld) avoit l'esprit fait pour les Mathematiques par l'ouvrage qu'il a composé sous le titre d'Elemens de Géométrie, et qui a été plusieurs fois imprimé.*

On trouve l'histoire et l'origine de cet ouvrage dans une anecdote que racontoit M. Nicole à ses amis, et qui montre bien jusqu'à quel point le génie de M. Arnauld étoit propre aux Mathematiques. M. Nicole ditoit que M. Pascal ayant montré un jour à M. Arnauld un travail qu'il avoit fait sur les Elemens d'Euclide, celui-ci n'en fut pas content, parce que M. Pascal y laissoit le défaut d'ordre qui se trouve dans Euclide. M. Pascal défia en riant le Docteur de faire mieux. M. Arnauld accepta le défie et à son premier loisir il traça l'ordre selon lequel il falloit étudier et enseigner la Géométrie. Etant au Chesnai proche Versailles pour rétablir sa santé après une maladie, il commença à executer son plan, et enfin il le mit dans l'état où il est imprimé. Lorsque M. Pascal vit l'ouvrage, il condamna le sien au feu, et reconnut franchement que M. Arnauld avoit trouvé le vrai ordre naturel de traiter cette matière, et il en rendit gloire au Docteur de Sorbonne."

Hier haben wir durch einen vollständig einwandsfreien Zeugen, durch Nicole, einen der bedeutendsten unter den Herren von Port royal, der wohl persönlich jener Unterredung zwischen Pascal und Arnauld beiwohnte, einer Unterredung, die wir in den Salon der geistreichen Madame de Sablé verlegen, von der wir im ersten Teile unserer Arbeit ausführlich erzählten, ein hübsches Bild von der Entstehungsgeschichte der *Géométrie* Arnaulds. Wir erfahren sogar, wo sie verfafst wurde, wir vernehmen,

wie Pascal die Anregung gab zur Niederschrift und endgültigen Fassung der Gesichtspunkte, welche schon in Arnaulds *Thesen* von 1641 uns zuerst entgegengetreten sind. Damit ist zugleich erwiesen, dafs auch Pascal wirklich eine Elementargeometrie verfafst hat, eine Thatsache, die bisher aus dem winzigen Fragmente, das C. J. Gerhardt in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1892 S. 202—204 aus Leibniz' Nachlafs veröffentlicht hat, nur vermutet werden konnte. Leibniz hatte jenes Blatt von de Billettes erhalten (s. M. Cantor, *„Vorlesungen"* Bd. II S. 682). Dafs wirklich Teile von Pascals *„Essai"* der Verbrennung entgingen, könnte man aufserdem aus einem Briefe Leibniz' an Oldenburg vom 12. Juni 1675 schliefsen, der lautet: *Clarissimus Pererius, Pascalis ex sorore nepos, misit mihi ex Avernia per suos fratres Ms. quaedam fragmenta Pascaliana. Ex quibus nunc penes me habeo elementa Geometrica singulari quadam ratione ab eo tractata, quamquam non integra. Quae ubi reddidero etiam Conica mihi legenda dabunt* (s. Leibniz' Brief vom 30. August 1676). Um damit Besoignes Erzählung in Einklang zu bringen, braucht man ja nur anzunehmen, dafs die Freunde Pascals jene Fragmente dem Feuer rechtzeitig entrissen. Besoignes Nachricht enthält zudem durch Leibniz' Zusatz *„non integra"* eine gewichtige Bestätigung.

Arnaulds *Elementargeometrie* wurde also von Pascal sehr günstig beurteilt, so günstig, dafs er sie über seine eigene Arbeit stellte. Ein glänzendes Zeugnis! Mit ebenso grofsem Beifall wurde Arnaulds *Lehrbuch* von der gleichzeitigen Gelehrtenwelt aufgenommen. Wir finden in den *Philosophical Transactions*, dem Organ der Royal Society in London, folgende Ankündigung im Februarheft von 1667/8 (in der Lateinischen Ausgabe: *Acta philosophica societatis regiae in Anglia Anni MDCLXV, LXVI; LXVII, LXVIII, LXIX, Auctore Henrico Oldenburgico, societatis reg. secret., Anglice conscripta, et in Latinum versa interprete C. S. Nunc iterum adiecto indice accurato edita Lipsiae anno MDCLXXV* S. 512).

VI. Ennarratio quorundam librorum.

I. Nouveaux Elemens de Geometrie.

Sive tractatus mathematicus titulum ferens, Nova Elementa Geometrica, impressus Parisiis in quarto, Anno 1667.

Divisus in 15 libros seu sectiones continet:

Novam methodum, novasque Demonstrationes communissimarum Propositionum Geometricas.

Nova media domonstrandi, quaenam lineae sint incommensurabiles.

Novas mensuras Angulorum hactenus non consideratas.

Novos modos inveniendi et demonstrandi proportionem linearum.

In quibus observamus, Authorem prodere methodo nova et Ordine pro-

prio, fundato super Algebraica Elementa, diversas novas Demonstrationes communiorum propositionum, contentarum praecipue in primis sex libris Elementorum Euclidis, et sine recursu ad Eucliden, vel quemvis alium scriptorem Geometricum, ad demonstrandum quodlibet in novis his Elementis assertum.

Quibus additur solutio Problematis Arithmetici, quod Author vocat Quadrata Magica scil. Dato quadrato Cellularum pari seu impari repleto Numeris sive secundum Progressionem Arithmeticam sive Geometricam: ita disponere omnes illos numeros, in aliquo simili quadrato Cellularum, ut omnes Numeri cuiusque ordinis sive collateralis, sive ascendentis et descendentis, sive duplicis Diagonalis, existentes in progressione Arithmetica additi, eandem semper producant summam, et in Progressione Geometrica multiplicati cum invicem, semper idem Productum conficiant.

Mit dem letztgenannten Problem wird sich der dritte Abschnitt des zweiten (mathematischen) Teils vorliegender Arbeit beschäftigen.

Aber nicht genug damit, auch die andere bedeutendste gelehrte Publikation der Zeit hat sich mit Arnaulds *Géométrie* bekannt gemacht, das *Journal des Sçavans*, welches im Jahre 1655 von Denis de Sallo begründet worden war. Wir haben mit Hilfe von *Cornelius a Beughem's La France Sçavante*, Amstelod. MDCLXXXIII in 12°, einem sehr brauchbaren Generalregister mit chronologischem, Personal- und Realindex der ersten Jahrgänge des *Journal des Sçavans*, die betreffende Stelle gefunden. Sie lautet (im Heft vom 26. Dezember 1667):

Nouveaux Elemens de Géométrie.

In 4. à Paris chez Charles Savreux.

De toutes les Sciences, il n'y en a point qui ait été traitée avec une si belle méthode que la Geometrie. Néantmoins on a remarqué ce défaut dans les ouvrages des anciens Géomètres, qu'ils ont eu plus de soin de la certitude que de l'évidence de leurs demonstrations. Et cela se voit particulierement dans l'arrangement des propositions qui composent le Liure des Elemens que l'on attribue à Euclide. Car cet Auteur sans se mettre en peine de l'ordre naturel, qui est de commencer par ce qu'il y a de plus simple et de traitter séparément ce qui est different, a seulement pris garde à ranger les propositions en sorte que les premières servent à démontrer les suivantes et a souvent meslé des propositions où il traite de figures très differentes. Ramus qui a raffiné sur toutes les sciences, a composé un Liure de Geometrie où il a tâché d'éviter ce défaut. Mais il avoüe qu'il s'est plus appliqué à y observer les regles de la Méthode, qu'à traiter le fond de la Geometrie. Et en effet s'il a suivy un ordre plus naturel qu'Euclide, il s'en faut beaucoup qu'il n'ait donné tant de force à ses demonstrations.

Néantmoins comme ces deux choses ne sont pas incompatibles, l'Auteur de ce Liure a entrepris de les accorder: Et il y a heureusement réeussi au jugement des plus intelligens dans cette Science. L'ordre qu'il garde est très naturel. Il considère dans les quatre premiers Liures, ce qui convient à la Grandeur en général et principalement les Raisons et les Proportions, qui sont les fondemens de la Geometrie. Il vient en suitte aux différentes espèces de Grandeur: Et comme de toutes les grandeurs continües il n'y en a point de plus simple que la Ligne, il en examine les proprietez dans les trois Liures suivans, et il traitte par ordre des Lignes Perpendiculaires, des Obliques, des Paralleles, et de celles qui sont terminées à une circonference. Des Lignes il passe aux Angles, dont il parle dans le VIII. et dans le IX. Liure. Il employe le X. et le XI. à traitter des Lignes Proportionelles et des Reciproques: Et après avoir parlé des Figures dans le XIII., il considère en particulier dans les trois derniers Liures les Triangles, les Quadrilateres et les autres Figures Polygones.

Mais le principale avantage de ce Liure est que quantité de demonstrations très embarrassées qui ne convainquoient l'esprit qu'après l'avoir beaucoup fatigué et qui après l'avoir convaincu ne le satisfaisoient point, y sont proposées d'une manière si simple qu'on a aucune peine à les concevoir, et cependant si certaine qu'elles ne sont pas moins convaincantes que celles d'Euclide.

De plus il y a dans ce Liure de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de mesurer les angles, de trouver et démontrer la proportion des lignes; et une méthode très-facile de faire les Quarrez Magiques, qui est un des plus celebres Problemes d'Arithmetique.

Die Verbreitung von Arnaulds *Géométrie* wurde durch die Ankündigung in den *Philosophical Transactions* und die äufserst günstige Rezension im *Journal des Sçavans* jedenfalls sehr befördert, noch mehr aber verdankte sie ihr rasches Bekanntwerden inneren Ursachen; denn das Studium der Elementargeometrie wurde durch Arnaulds Methode ungemein erleichtert und weiteren Kreisen zugänglich. Im Jahre 1683 wurde eine zweite Ausgabe notwendig; sie erschien wiederum zu Paris, diesesmal bei dem Verleger von Pascals Schriften, bei Guillaume Desprez (De Prexius bei Leibniz). Laut dem *Avertissement sur la seconde édition* ist in den ersten vier Büchern vieles verändert, das zweite und dritte Buch vollständig umgearbeitet worden. Arnauld selbst schien von der zweiten Ausgabe nicht so befriedigt; wir finden seine Ansicht darüber in einem Briefe vom 28. Oktober 1683. (*Gesamtausgabe der Werke* Tom. IV p. 149 Lettre XI.)

A Madame Bois!

Je n'ai reçu que depuis deux jour les nouveaux Elémens. Je les trouve bien imprimés pour ce qui est du caractere. Mais n'en ayant lu que ce qui est de nouveau danc cette edition, j'y ai trouvé bien des fautes, outre celles de l'errata, que je voudrois qu'on eût mis en plus grosses lettres. Je ne m'en prends à personne. Je ne doute point que vous n'y ayiez fait de votre mieux; et je suis assuré que M. Ferrier y aura aussi mis un grand soin. Je lui en suis très-obligé. Cela peut-être venu du copiste qui a copié mes brouillons, qui n'a pas assez pris garde aux avis que j'avois donnés et à suivre ma ponctuation et mes à linea. Car un des plus grands défauts et qu'il y en a trop peu.

Quoi qu'il en soit, j'ai pensé au remede, qu'on pourroit apporter à cela, et j'en ai trouvé de meilleur que d'imprimer l'Avis au lecteur que je vous envoie pour le mettre au commencement, afin que par là et l'errata chacun puisse corriger son livre, comme j'ai été obligé d'en corriger un avant que de le donner à une personne de condition de mes amis. Je salue ma commere et tout le reste de votre famille. Je prie Dieu qu'il la benisse.

En ouvrant le livre, je suis tombé sur la page 347. Il y a une figure qu'on a voulu faire par des caracteres d'impression, au lieu de la faire par une figure de bois; et elle est tout à fait mal faite. Car au lieu qu'elle devoit être quarré c'est à dire aussi large d'un côté que de l'autre, elle est bien moins haute que large; et les divisions sont presque égales, au lieu qu'elles devroient être notablement inégales. Je viens encore de trouver une autre chose assez mal. C'est que dans le XIV. livre on renvoie assez souvent au 2e et au 3e livre. Or comme ces deux livres sont tout changés, il falloit aussi changer ces renvois, et on a oublié de le faire. Je vous prie donc, mon compere, de faire imprimer l'avis que je vous envoie, qui reparera un peu les défauts de cet ouvrage, en donnant moyen de le corriger à ceux qui le voudront lire.

Je me suis encore apperçu qu'ayant ajouté au Xe livre deux ou trois propositions touchant une ligne coupée harmoniquement, on ne les y a point mises, sans que j'en puisse deviner la raison; si ce n'est peut-être qu'on a eu si peu de soin des papiers que j'avois envoyés pour faire cette seconde édition, qu'on en ait laissé perdre cet endroit. Je souhaiterois qu'on le cherchât, et si on le trouvoit, qu'on le fît imprimer avec ce titre: Addition pour la fin du Xe livre qui a été oubliée par mégarde.

Page 98 l. 24 propositions, lisez proportions.

Die Sätze Arnaulds über harmonisch geschnittene Gerade wurden nie gedruckt; vielleicht sind gerade sie es, die Leibniz im Auge hat,

wenn er schrieb: *„Il (Arnauld) méditoit alors quelque chose de fort beau sur les raisons et sur les proportions et je serois faché s'il en avoit été distrait entièrement"* (27. April 1683). Wir haben bis jetzt wenigstens den Verlust der gerade für die neuere synthetische Geometrie interessanten Papiere zu beklagen.

Auch der nachstehend wiedergegebene Brief (Dez. 1693) bezieht sich auf die zweite Ausgabe (*Gesamtwerke* Tom. III S. 701 Lettre DCCCCXCIII) A. M. Dodart[1]):

Je vous réponds par avance à votre lettre du 25 que je reçus hier, ne sachant encore comment, ni quand je vous enverrai cette reponse.

Je commence par ce que j'avois oublié de vous mander touchant les Noveaux Elémens de Géométrie, de peur de l'oublier encore une fois. L'Auteur est mal satisfait de la seconde édition, à causes des fautes d'impression qu'on y a laissées. Mais ces fautes étant corrigées, comme un habile homme le peut faire aisément, il estime beaucoup plus le II. livre de la seconde édition, que ce même livre de la premiere. Et il croit qu'il feroit entrer votre ami dans son sentiment, s'il lui pourroit parler. Mais cela ne se peut expliquer par lettre. Le Ve livre de la seconde édition est aussi beaucoup meilleur que celui de la premiere. Et il me semble qu'il y a quelque chose pour l'explication des incommensurables qui est noveau. On y a aussi corrigé une grosse faute de la premiere édition, touchant les nombres quarrés qui sont égaux à deux autres nombres quarrés com. 25, à 9 et 16. Je viens de penser que je ferois mieux de vous envoyer un livre de ces Elémens, corrigé par l'Auteur en beaucoup d'endroits; avec un brouillon de ce qu'il avoit marqué qu'il falloit corriger dans cette seconde édition, outre l'errata; mais à condition que vous me renverrez l'un et l'autre quand vous en aurez fait l'usage que vous voudrez.

Eine dritte Ausgabe von Arnaulds Buch wurde 1692 in Holland veranstaltet. Sie erschien in La Haye, chez Jean van Duren, jedoch im Format kleiner, in 12°. Mit neuem Titelblatt versehen, kennt man von dieser Ausgabe Exemplare vom Jahre 1711. In den nachfolgenden Briefen wird diejenige des Jahres 1692 erwähnt.

Lettre de M. Dodart (*Ges. Werke* Tom. IV p. 24). Der Brief ist von 1694.

Il y a quelques mois qu'un de mes amis, grand approbateur et même admirateur de la Géométrie nouvelle attribuée à M. Arnauld, me fit de-

1) Denis Dodart, Mitglied der Ancienne Academie des Sciences, geboren 1644, gest. 1707, hervorragender Botaniker, Verfasser der *„Mémoires pour servir à l'histoire des plantes"* 1676.

mander s'il (M. Arnauld) trouveroit bon qu'il poussât cette Géométrie jusques aux solides. Je lui fit dire que la reponse étoit dans l'avertissement, où l'Auteur si je m'en souviens, s'excuse de ne l'avoir pas fait, parce qu'il avoit d'autres occupations, et ajoute, ce me semble que suivant la route marquée dans ce livre, il sera facile de supléer ce qui y manque. Depuis le temps j'ai vue l'auteur de ce supplément prétendu qui m'a dit que voulant y travailler, il en avoit été détourné par la nouvelle édition de la Géométrie du P. Lami, qui n'est visiblement qu les Elémens de M. Arnauld, poussés jusqu'à la Stéreométrie inclusivement, quoique sans nommer M. Arnauld. Car outre que mon ami est un Géomètre sublime, il est très-familier et très-net, et vouloit ajouter outre la Stéreométrie une introduction à l'Algebre, très courte et très nette, et proposer une revision du II. livre, qui est des proportions. Un mot sur cet article, si vous pouvez trouver une voie pour savoir de M. Arnauld s'il le trouvera bon; car sans cela on n'écrira pas un mot . . .

Arnauld erwiderte im folgenden Briefe vom 10. Juli 1694 (*Gesamtausgabe* Tom. IV p. 63 Lettre MLXI):

A. M. Dodart.

Je suis bien obligé, Monsieur, à votre ami, qui veut bien se donner la peine d'ajouter à mes Elémens de Géométrie ce qui y manque, qui est de la Stéreométrie. Mais j'ai un avis à lui donner sur cela, qui est que la seconde édition de ces Elémens qui a été faite à Paris, est pleine d'une infinité de fautes, et qu'il faudroit qu'il eût celle qui a été faite en Hollande par une personne que je ne connois point. S'il ne l'a peut trouver à Paris je tâcherai de vous l'envoyer. Il y a cependant dans cette édition de Hollande quelques fautes qui y sont restées, mais un habile homme les corrigera aisément pourvu qu'il y fasse attention. Je ne vois ce que votre ami entend par ces mots, „proposer une revision du seconde livre qui est des Proportions". Cela a-t-il rapport à ce que vous m'avez mandé autrefois qu'une personne estimoit plus la manière dont on avoit parlé des raisons et des proportions dans la première édition de ce qu'on en dit dans la seconde? Mais c'est de quoi que je ne saurois convenir. En ouvrant le livre de l'impression de Paris page 29 ligne 11 j'y ai trouvé deux fautes. La première „précisement. Mais il y aura", il faut „précisement tant de fois; mais il y aura". La seconde lig. 16 „de la composition", lisez „de la comparaison". Cette dernière faute est demeurée dans l'impression d'Hollande.

Arnauld verfolgte, wie wir aus diesen Briefen ersehen, mit gespannter Aufmerksamkeit die Ausgaben seiner *Géométrie*. Nach seinem Tode wurde sie unseres Wissens nur noch einmal aufgelegt; nämlich für die Gesamt-

ausgabe von Arnaulds Werken, im Jahre 1781. Die *Nouveaux Elémens de Géométrie* sind in Tom. LXII enthalten, abgedruckt von der dritten Ausgabe von 1692; zur Korrektur der in dieser letzteren noch stehen gebliebenen entstellenden Druckfehler wurde von den Herausgebern der *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld* ein Exemplar der zweiten Pariser Ausgabe benützt, das mit handschriftlichen Verbesserungen bedeckt war; dieselben sind von sachkundiger Hand, vielleicht nach Arnaulds eigenen Notizen, mit grofsem Fleifs ausgeführt gewesen, wie die Herausgeber berichten.

Es wäre ein gänzlich verfehlter Schlufs, wollte man die Bedeutung von Arnaulds *Géométrie* nach der verhältnismäfsig geringen Zahl von drei Ausgaben (die vierte in den *Oeuvres* ist nicht hierher zu rechnen) beurteilen. Im Gegenteil, Arnaulds *Nouveaux Elémens* bezeichnen eine Epoche in der Geschichte des mathematischen Unterrichts. Eben deshalb, weil Arnaulds Methode sich so ganz und unwiderstehlich der Elementargeometrie bemächtigte, weil sie Gemeingut wurde, weil alle Schriftsteller jener und der Folgezeit, welche die Elemente behandelten, von ihr abhängen, konnte es geschehen, dafs Arnaulds Name und das Buch, welches die Euklidkritik des siebzehnten Jahrhunderts zur schärfsten Ausprägung brachte und einen in solcher Vollständigkeit zum ersten Male seit Euklid unternommenen Neuaufbau der Elementargeometrie darstellt, in gänzliche Vergessenheit geriet. Montucla nennt Arnaulds Namen nicht; merkwürdig berührt es, dafs Chasles im *Aperçu historique* Arnauld nicht erwähnt, während er in einer eigenen Note (Note XVII) seine Verwunderung ausspricht, dafs der *Euclides adauctus et methodicus* von 1671 des Italieners Guarini nicht in der Geschichte der Geometrie genannt werde. Einen anderen italienischen Schriftsteller Vitale Giordano Giordani, der 1686 einen *Euclide restituto* herausgab (s. M. Cantor, *„Vorlesungen"* Bd. III S. 14), machte Leibniz auf Arnaulds Buch aufmerksam: *„Nonancurtius quidam in Belgio libellum scripsit de rationibus quem me videre memini; huius methodum laudat Arnaldus (celebris apud Theologos, sed idem in omni doctrinarum genere excellens) in secunda editione libri Gallici, quem inscripsit: Nova Geometriae Elementa* (s. Leibniz' Brief in Bd. I von Gerhardts *Leibnizausgabe*).

Unter den Schriftstellern, deren Abhängigkeit von Arnauld wir urkundlich feststellen konnten, ist zuerst Bernhard Lamy[1]), Pater vom Oratorium, zu nennen. Wir haben ihn schon in dem Briefe Dodarts an Arnauld kennen gelernt. Auch in der Geschichte der Philosophie ist er eine bekannte Persönlichkeit: er schrieb zu Gunsten des Occasionalismus

1) Lamy: ältere Schreibweise; die neuere ist Lami.

Auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete nennt uns Cornelius a Beughem von ihm seine: *Traitez de Mechanique, de l'Equilibre des Solides et des Liqueurs à Paris 1679,* besprochen im *Journal des Sçavans* XXII 1679. Dieser Mann gab nun 1683 ein Lehrbuch der Geometrie heraus unter dem Titel: *Les elémens de géométrie et la mésure de l'étendue,* Paris in 12°. Obwohl er in der Vorrede selbst sagt, dafs er für seine Methode Arnauld verpflichtet sei und nie daran gedacht hätte, eine Elementargeometrie zu schreiben, wenn Arnauld der seinigen eine Stereometrie beigegeben hätte, scheint Lamys Unternehmen, wie es auch in Dodarts Brief aufgefafst wird, eine gewisse *„Contrefaçon"* gegen Arnaulds Originalleistung zu sein. Wir wissen nicht, glauben aber aus Arnaulds Antwort an Dodart zu entnehmen, dafs es als Fortsetzung von Arnauld nicht autorisiert war. Nichtsdestoweniger erlangte es rasche Verbreitung und wurde als Lehrbuch, das eben Arnaulds Methode fast unverändert aufgenommen hatte, vielfach benützt. Es wird in der von Tschirnhaus verfafsten und von Leibniz ausführlich rezensierten deutschen Schrift: *„Gründliche Anleitung zu nüzlichen Wissenschafften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, wie sie aniezo von den gelehrtesten abgehandelt werden",* (im 4° pagg. 32) empfohlen. Leibniz sagt in seiner Rezension in dem in Hannover 1700—1702 erschienenen *„Monatlichen Auszug aus neuen Büchern": „Langsame und geschwinde können hernach des Lamy Nouveaux Elémens de Géométrie durchnehmen, da sie das vorige in besser ordnung wiederholen."* Wir sehen, dafs schon hier Lamy geradezu als Verfasser von Arnaulds *Nouveaux Elémens de Géométrie* erscheint. Hat Lamy durch seine Usurpation von Arnauld die Aufmerksamkeit ab und auf sich zu lenken gewufst, so hat er wenigstens das Seine zur Verbreitung von Arnaulds Methode gethan. Da wir jetzt den historischen Zusammenhang und das Verhältnis beider Lehrbücher kennen, so können wir es nur als Triumph von Arnaulds Methode gelten lassen, dafs noch 1758 eine siebente Edition von Lamys Buch erschien. Ein Opus mehr algebraischer Natur scheinen Lamys *„Elémens des Mathématiques ou traité de la grandeur en général"* gewesen zu sein, von denen wir eine 3. edit. Amsterdam 1692 in 12° kennen. Wollte der besorgte Autor vielleicht durch dieses Werk die Verbreitung von Jean Prestets geschätztem, vorwiegend zahlentheoretischem Werk: *Elémens des Mathématiques* übernehmen, welches 1675 (besprochen im *Journal des Sçavans* 1676 X p. 135) unter dem Titel: *„Elémens des Mathématiques ou Principes Généraux de toutes les Sciences qui ont les grandeurs pour objets"* à Paris in 4° erschien, das 1689 wiederum in Paris in 2 vols zum zweitenmale, 1694 ebenda nochmals gedruckt wurde?

Wir wenden uns von Lamy ab und zu jenem Manne, welcher in

offenster und ehrlichster Weise in Dodarts Brief anfragen liefs, ob Arnauld damit einverstanden sei, wenn er dessen Werk durch eine Stereometrie vervollständige. Dieser Freund Dodarts kann wohl nur Pierre Varignon sein. Wir haben dafür folgende Gründe:

1) War Varignon an der Redaktion des *Journal des Sçavans* beteiligt, mufste also daher Arnaulds Buch kennen.

2) Varignon war wie Dodart Mitglied der Akademie der Wissenschaften, die beiden Gelehrten kannten sich also daher und waren befreundet; auf Varignon pafst Dodarts Satz: *Car outre que mon ami est un Géomètre sublime, il est très-familier est très-net.*

3) Wenn Dodart schreibt, dafs der Verfasser des geplanten Supplements zu Arnaulds *Nouveaux Elémens* sich von der Herausgabe durch Lamys Veröffentlichung abhalten liefs, so stimmt dies wieder ausgezeichnet mit dem Umstande überein, dafs Varignon sein Lehrbuch nicht selbst während seines Lebens veröffentlichte, sondern dafs dasselbe erst 1731 nach seinem Tode (1722) unter dem Titel: *Elémens de Mathématique de Monsieur Varignon* zum Druck befördert wurde.

4) Jener Freund Dodarts (s. dessen oben wiedergegebenen Brief) wollte eine Einleitung in die Algebra beigeben; wir finden diese als *Elémens d'algèbre et d'arithmétique* auf 66 Seiten an der Spitze von Varignons Buch.

5) Machen innere Gründe, z. B. die gerade bei M. Cantor, *„Vorlesungen"* Bd. III S. 527 wiedergegebene Herleitung des Satzes der Winkelsumme im Dreieck, welche genau mit der Arnaulds übereinstimmt, die Bedeutung, welche auf Axiome und Definitionen gelegt wird, die Stellung des pythagoräischen Satzes und dessen Beweis mit Hilfe von Proportionen es geradezu unwiderleglich, dafs jener vertraute Freund Dodarts der grofse Geometer Pierre Varignon ist.

Wir haben das Resultat gewonnen: *Pierre Varignons Werk Elémens de Mathématique ist direkt abhängig von Arnauld und dessen originaler Methode; ihre konsequente Durchführung auf stereometrische Grundlagen ist Varignons Verdienst.* M. Cantor nennt das Buch *„eine Geometrie von überall durchblickender Eigenart, die philosophische Geistesrichtung seines Verfassers zu erkennen gebend"*; damit ist am treffendsten Arnaulds Schule in ihrem berufensten Vertreter, in Varignon, charakterisiert.

Wir haben schon früher bei der Besprechung von Arnaulds mathematischen Thesen erwähnt, dafs ihm die bekannte Frage des Ptolemaeus an Euklid, ob es bei geometrischen Dingen nicht einen abgekürzteren Weg gäbe als den durch Euklids Elemente, sehr berechtigt erschien. Arnauld glaubte den geraden Weg für Könige zu kennen; in seinen *Nouveaux Elé-*

mens de Géométrie hat er ihn angebahnt. Dieser stolze Ausspruch Arnaulds sollte fünfundvierzig Jahre, nachdem er gethan wurde, thatsächlich seine Verwirklichung finden. Ein Herzog von königlichem Geblüt sollte durch Arnaulds Methode den Zugang zur Geometrie erreichen. Nähere Auskunft hierüber giebt uns der folgende Auszug aus der *Histoire de l'académie Royale des Sciences, année MDCCXXVII, à Paris, de l'Imprimerie Royale MDCCXXIX:*

En 1696 feu M. le Duc de Bourgogne étant venu en âge d'apprendre les Mathématiques, Mad^e. de Maintenon porta le Roi à confier cette partie de son éducation à M. de Malézieu, tandis qu'il donneroit à M. Sauveur les deux autres Enfants de France. M. de Malézieu assés délicat pour craindre qu'un si grand honneur ne s'accordât pas parfaitement avec l'attachement inviolable qu'il devoit à M. et Mad^e. du Maine et rassuré par eux-mêmes sur ce scrupule, demanda du moins en grace, que pour mieux marquer, qu'il ne sortoit point de son ancien engagement, il lui fut permis de ne point recevoir d'appointements du Roi. (Malézieu hat den Herzog von Maine in seiner Jugend unterrichtet, noch 1722 finden wir Malézieu als Direktor der Privatsternwarte dieses Herzogs.)

Parmi tous les Elémens de Géométrie qui avoient paru jusque-là il choisit ceux de M. Arnauld, comme les plus claires et les mieux digérés, pour en faire le fond des leçons qu'il donneroit à M. le Duc de Bourgogne. Seulement il fit à cet Ouvrage quelques additions et quelques retranchements. Il remarqua bientôt que le jeune Prince, qui surmontait avec une extrême vivacité les difficultés d'une étude si épineuse, tomboit quelques fois aussi dans l'inconvenient de vouloir passer à coté, quant il ne les emportoit pas d'abord. Pour le fixer d'avantage, il lui proposa d'écrire de sa main au commencement d'une leçon ce qu'il lui avoit été enseigné la vieille. Toutes ces leçons écrites par le Prince pendant le cours de quatre ans, et précieusement rassemblées, ont fait un corps, que M. Boissière, Bibliothecaire de M. le Duc du Maine, fit imprimer en 1715 sous le titre d'Eléments de Géométrie de Mgr. le Duc de Bourgogne.[1]) *L'éditeur les dédie au Prince même, qui en est l'Auteur, et n'oublie pas tout ce qui est dû au sçavant maître de Géométrie. Il y a à la fin du Livre quelques Problêmes qui n'appartiennent point à des Eléments, résolus par la méthode Analytique et qui, selon toutes les apparences, sont de M. de Malézieu. Il est dit sur ce sujet, qu'Archimède, et les grands*

1) Louis, Herzog v. Bourgogne, Enkel Ludwigs XIV., geb. 1682. Louis Auguste, Herzog v. Maine, Sohn Ludwigs XIV. und der Frau v. Montespan, geb. 1670.

Géomètres anciens, ont dû avoir notre Analise, ou quelque méthode équivalente, parce qu'il est moraliment impossible qu'ils eussent suivi, sans égarer des routes aussi composées que celles qu'ils proposent. Mais par-là, on leur ôte la force merveilleuse qui à été necéssaire pour suivre sans égarer, des routes si tortueuses, si longues et si embarrassées, et cette force compense le mérite moderne d'avoir découvert des chemins sans comparaison plus courts et plus faciles. On veut que pour causer plus d'amiration, ils ayent caché leur Secret, quoiqu'en le révélant ils eussent causé une admiration, du moins égale, et qu'ils eussent en même temps infiniment avancé des Sciences utiles, on veut qu'ils ayent été tous également fidelles à garder ce secret, également jaloux d'une gloire qu'ils pouvoient changer contre une autre, également indifférents pour le bien public.

Damit ist erwiesen, dafs auch Malézieus Lehrbuch sich auf Arnauld stützt und dafs Nicolas de Malézieus Unterrichtsmethode (M. Cantor erwähnt Malézieu in Bd. III S. 14—15 der *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"*) im grofsen und ganzen die Antoine Arnaulds ist; zugleich giebt zitierte Stelle Aufschlufs über die Entstehung der *Elémens de Géométrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne.* —

Inhaltsübersicht der Nouveaux Elémens de Géométrie.

Schon in der Rezension des *Journal des Sçavans* haben wir in grofsen Zügen den Inhalt von Arnaulds *Géométrie* kennen gelernt; wir haben bei der Besprechung der für die Geschichte der Mathematik in Betracht kommenden Teile seiner *Logik* viele der Gesichtspunkte kennen gelernt, welche Arnauld in seiner *Géométrie* verwertet hat; es erübrigt aber doch noch eine etwas ausführlichere Darstellung des Buches unter Hervorhebung interessanter Stellen, Wiedergabe originaler Beweise und die Konstatierung des Eigentumsrechtes Arnaulds an zahlreichen Lehrsätzen. Damit haben wir uns im folgenden zu beschäftigen.

Arnaulds *Nouveaux Elémens de Géométrie* sind eingeteilt in 15 Bücher. Dem I. Buche voraus gehen die Definitionen der Hilfsmittel des synthetischen Apparats, die Definitionen des Axioms, der Forderung (Demande), des Theorems, des Problems, des Lemma, Corollars, der Definition selbst; für Sätze mit zahlreichen Corollaren verwendet Arnauld die Bezeichnung: *„Proposition fondamentale"*. Arnauld fügt hinzu, dafs diese Dinge eigentlich in die Logik gehören; wir haben dort schon z. B. besonders für das Axiom und die Definition die Begriffe kennen gelernt, welche Arnauld mit den aufgeführten Bezeichnungen zur Deckung bringt. Bei Pascal und Arnauld sind überhaupt Logik und Geometrie keine sehr streng geschiedenen

Wissensgebiete. Pascal hat einmal den Ausspruch gethan, Geometrie sei Logik, und Arnauld sagt in der Vorrede der *Nouveaux Elémens*: „*On voit qu'il n'estoit pas fort difficile à l'Auteur de la Nouvelle Logique ou Art de penser, qui avoit veu quelque chose de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IV. Partie, les défauts de la méthode d'Euclide, et d'avancer qu'on pourroit digerer la Geometrie dans un meilleur ordre. C'estoit deviner les choses passées.*" Mit dem letzten Satze weist er auf die von ihm selbst gefundenen Lehrsätze hin.

An diese Rekapitulation schliefst sich die Erklärung der verwendeten mathematischen Operationszeichen an. Wir finden in der heutigen Bedeutung das Zeichen der Addition und Subtraktion, das Gleichheitszeichen; die arithmetische Proportion schreibt Arnauld $7 \cdot 3 :: 13 \cdot 9$, die geometrische $6 \cdot 2 :: 12 \cdot 4$, die stetige $\therefore 3 \cdot 9 \cdot 27$. Durch Nebeneinanderstellung zweier kleiner lateinischer Buchstaben bezeichnet er sowohl das Produkt zweier Faktoren (*grandeur plane*), d. h. ein Rechteck der Höhe b und der Breite d, als auch eine Strecke, deren Endpunkte b und d genannt werden.

Für die Rückverweise führt er, was wieder bezeichnend ist für seinen Sinn für Methodik, eine sorgfältige Nummerierung der einzelnen Aussprüche, seien es nun Axiome, Theoreme u. s. w. oder Definitionen und Beweise, durch.

Das erste Buch behandelt getreu dem in der *Logik* festgestellten Grundsatze, die Gattung vor den Arten zu behandeln, die Gröfsen im allgemeinen; es lehrt die vier Grundoperationen. Arnauld setzt gewisse einfachste natürliche Kenntnisse voraus; Zweck sei es für jede Wissenschaft, diese zu vertiefen und zu erweitern. Es wird also hier vorausgesetzt:

1) Das Rechnen mit Zahlen.

2) Das kommutative Prinzip.

3) Der Begriff des Körpers, der Oberfläche (*surface*), indem man von einer Dimension absieht, und der Linie, wobei zwei Dimensionen unberücksichtigt bleiben.

4) Die Übertragung des Begriffs des Produkts auf den Inhalt begrenzter Flächenstücke.

5) Die Deutung von Gröfsen als Körper, Flächen und Strecken.

An sechster Stelle wird die Wichtigkeit allgemeiner Gröfsenzeichen betont gegenüber speziellen Fällen, in welche noch deren spezifische Abhängigkeit einzugehen pflegt; es wird darauf aufmerksam gemacht, dafs die Identität der formalen Bezeichnung gewahrt werden mufs. Unter Gröfse im allgemeinen versteht Arnauld die geometrischen Gebilde, die Zahlen, die Zeit, Geschwindigkeit, kurz jede Quantität.

Sodann wird der aliquote Teil (*mesure*) eines Ganzen definiert.

3 und 4 sind *„aliquotes pareilles"* von 9 und 12, weil $9:3 = 12:4$; *„portion"* ist ein aliquoter oder nicht aliquoter Teil.

Es folgen Axiome über Gleichheit und Ungleichheit, wie:

Das Ganze ist gröfser als sein Teil.

Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile.

Sind zwei Gröfsen einer dritten gleich, sind sie unter sich gleich.

Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches u. s. w

Die *„aliquotes pareilles"* gleicher Gröfsen sind gleich und umgekehrt

Als Schreibweise für das Quadrat giebt Arnauld in der ersten Ausgabe von 1667 b^q (*b quarré*) oder b^2 (*b de deux dimensions*) analog für den Cubus b^c oder b^3; in den späteren Ausgaben ist auch die Schreibweise der zweiten Potenz qb und $b2$ erwähnt.

Der inverse Charakter von Multiplikation und Division wird betont (*la multiplication refait ce que la division avoit défait*).

„Grandeurs complexes" heifsen bei Arnauld die Aggregate; dafür giebt er besondere Regeln hinsichtlich der Grundoperationen.

„terme" ist einer der Summanden des Aggregats.

Der Klammern bedient sich Arnauld nicht. Die Zeichenänderungen bei der Subtraktion der *„grandeurs complexes"* werden begrifflich klar gemacht.

Bei der Multiplikation der Aggregate sind soviele Partialprodukte zu bilden, wie das Produkt der Zahl der Terme des einen Faktors in die entsprechende Anzahl des andern Faktors angiebt. Daran schliefsen sich die Vorzeichenregeln für die Multiplikation. Um sich klar zu machen, wie zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben, verfährt Arnauld in den späteren Ausgaben seines Buches so. Er giebt dem einen Faktor den Vorzug. Wir wollen ihn Multiplikator nennen. Ist der Multiplikator positiv, so ist die Multiplikation auf die Addition zurückzuführen; denn setzt man den zweiten Faktor sovielmal als Summand an, als der Multiplikator Einheiten hat, so bleibt, ob der zweite Faktor nun positiv oder negativ ist, das Zeichen nach den Regeln der Addition erhalten, z. B.

$$3 \cdot 7 = +7 + 7 + 7 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot (-7) = (-7) + (-7) + (-7).$$

Ist dagegen der bevorzugte Faktor, der Multiplikator, negativ, so ist die Multiplikation auf die Subtraktion zurückzuführen, z. B.

$$(-3) \cdot 7 = -(+7) - (+7) - (+7)$$

und

$$(-3)(-7) = -(-7) - (-7) - (-7),$$

d. h. der zweite Faktor ist sovielmal (ob positiv oder negativ) als Subtrahend anzusetzen, als der Multiplikator Einheiten enthält. Hier, z. B. fi

1 : (— 3) = (— 4) : 12, sei die Definition der Multiplikation: dafs die Einheit sich zum einen Faktor verhalten müsse, wie der andere zum Resultat der so definierten Operation, nicht gerechtfertigt. Durch diese Betrachtungen ist Arnauld zu der Ansicht gelangt, dafs die Proportion 1 : — 1 = — 1 : 1 nicht wirklich richtig sei; dies ist die Stelle in Arnaulds Buch, welche Leibniz im Streite mit Grandi unter Berufung auf Arnaulds Namen angeführt hat. M. Cantor erwähnt diese Thatsache Bd. III S. 367 seiner „*Vorlesungen*", wir haben schon in der Einleitung zu vorliegender Arbeit darauf hingewiesen.

Am Schlufs des I. Buches werden die Gleichungen ersten Grades eingeführt. Die Seite der Gleichung heifst „*membre d'équation*". Die Reduktion auf 0 wird gelehrt. Das Negative weniger als Null genannt. Einige einfache Textgleichungen mit mehreren Unbekannten, z. B. die alte Aufgabe vom säckebeladenen Esel und der Eselin, eine Wechselaufgabe u. s. w. folgen.

Das II. Buch beginnt in der ersten Ausgabe mit dem Begriff der Differenz (*excès, difference*) und des Verhältnisses (*raison*). Der erste Term bei einer Vergleichung zweier Gröfsen heifst „*antecedent*", der andere „*consequent*". Das Verhältnis (*raison*) zweier Gröfsen ist der Ausdruck dafür, wievielmal die zweite in der ersten enthalten ist. Das Verhältnis wird von Arnauld also als Quotient definiert. Es werden sodann zwei Arten von Verhältnissen unterschieden: 1) *raison exacte* oder *raison de nombre à nombre* ist ein Verhältnis, in welchem der Konsequent selbst aliquoter Teil oder ein aliquoter Teil des Konsequenten aliquoter Teil des Antecedenten ist. Solche Gröfsen, deren Verhältnis eine *raison de nombre à nombre* ist, heifsen kommensurabel. Die zweite Art ist das Verhältnis zweier Gröfsen, welche kein gemeinsames Mafs besitzen (Inkommensurablen); es heifst „*raison sourde*". Es wird dann weiter unterschieden, und zwar: *Raison de nombre à nombre* in *raison d'égalité* (ein Bruch, dessen Wert 1 ist) und *raison d'inégalité;* letzteres wieder in *raison de moindre inégalité* (echter Bruch) und *raison de plus grande inégalité* (unechter Bruch). Es folgt die Definition der arithmetischen und geometrischen Proportion als Gleichheit zweier Differenzen bezw. Verhältnisse. *Raison d'égalité* und *égalité des raisons* dürfen nicht verwechselt werden. Eine stetige arithmetische Proportion von mehr als drei Gliedern heifst „*progression*".

Eingehend behandelt Arnauld die geometrische Proportion.

Die beiden äufseren Glieder inbezug auf die inneren heifsen *reciproques;* alle Glieder *proportionels.*

Für die Beweise seiner Sätze über Proportionen geht Arnauld von folgenden, von ihm natürliche genannten, einfachsten Proportionen aus:

(I) $A : A = B : B$ (alle *raisons d'égalité* sind unter sich gleich),

(II) $B : 3B = C : 3C$,

(III) $B : C = 3B : 3C$,

(IV) $3B : 5B = 3C : 5C$,

(V) $3B : 3C = 5B : 5C$.

Was von den Multiplen gilt, gilt auch vom aliquoten Teil; denn jede Gröfse ist Multiplum ihrer aliquoten Teile und selbst aliquoter Teil ihrer Multiplen.

Arnaulds Hauptdefinition der Proportion lautet: Zwei Verhältnisse sollen gleich heifsen, wenn alle *„aliquotes pareilles"* der beiden Antecedenten gleichvielmal in den beiden Consequenten enthalten sind: d. h. wenn es sich um die Proportion handelt $b \,.\, c :: f \,.\, d$ und $x = \frac{1}{100} b$ ist, soll y so gewählt werden, dafs $y = \frac{1}{100} f$; dann sind zunächst x und y *„aliquotes pareilles"* von b und f; also:

$$b \,.\, x :: f \,.\, y$$
$$b \,.\, f :: x \,.\, y;$$

wenn nun $c : x = d : y$ ist, hat man eine *raison de nombre à nombre* und es ist $b \,.\, c :: f \,.\, d$; diese Proportion gilt auch noch, wenn x zwar nicht restlos in c, aber y (und zwar dann auch nicht ohne Rest) ebensooft in d (auf)geht; dann hat man eine Gleichheit (Proportion) zweier *raisons sourdes* (irrationaler Verhältnisse). [Es heifst dies also soviel, um eine moderne Ausdrucksweise zu brauchen, dafs der Exponent eines irrationalen Verhältnisses eine Irrationalzahl, aber ein ganz bestimmter, einer und nur einer, ist.] Arnauld fährt fort: Wenn man den zweiten Fall hat, also der Rest von x in den ersten Consequenten r heifsen möge, der von y in den zweiten Consequenten r', so sind *„aliquotes pareilles"* von x und y gleichoft in r und r' enthalten, also:

$$x : r = y : r';$$

es sei die ursprüngliche Proportion

$$b : c = f : g$$

gleich der folgenden:

$$5x : (3x + r) = 5y : (3y + r');$$

es sei nun

$$x' = \tfrac{1}{10} d'x, \quad y' = \tfrac{1}{10} d'y;$$ [1])

1) Das hier in Druck erschienene $d'x$, $d'y$ für einen Bruchteil von x, und zwar einen kleinen, aliquoten, erinnert lebhaft an das Differential dx, sollte dieses französische $d'x$ Leibniz bei der Wahl seiner Bezeichnung vorgeschwebt sein?

ich behaupte, dafs, wenn x' in r 7mal $+ r_1$ geht, auch y' 7mal $+ r_1'$ in in r' gehen mufs; es wird die Proportion

$$x : r = y : r'$$

jetzt

$$10x' : (7x' + r_1) = 10y' : (7y' + r_1'),$$

die erste Proportion lautet jetzt, da $b = 50x'$ (da $c = 30x' + r$ und $r = 7x' + r_1$, also $c = 37x' + r_1$),

$$50x' : (37x' + r_1) = 50y' : (37y' + r_1');$$

würde diese Proportion nicht gelten, so würde sie auch die Unrichtigkeit der als richtig vorausgesetzten

$$b \,.\, c :: f \,.\, g$$

zur Folge haben; also mufs

$$x : r = y : r'$$

sein.

Für *„raisons de nombre à nombre"* läfst sich der Beweis also positiv führen; für irrationale Verhältnisse dagegen nur apagogisch.

Es schliefsen sich hier bekannte Sätze über Proportionen an, z. B.:

Die Summe oder Differenz der Antecedenten in einer Proportion verhält sich zur Summe bezw. Differenz der Consequenten wie ein Antecedent zu seinem Consequent.

Eine Proportion bleibt bestehen, wenn man auf beiden Seiten die Summe oder Differenz eines Antecedenten und seines Consequenten vergleicht mit denselben Consequenten. Diese Operation heifst in der ersten Auflage Componendo bezw. Dividendo.

Der Hauptsatz über geometrische Proportionen: Das Produkt der äufseren Glieder ist gleich dem der innern, wird für die Gleichheit zweier *„raisons sourdes"* besonders bewiesen unter Zurückgreifen auf die Definition der Proportion.

Für die bei Proportionen möglichen Vertauschungen der Glieder giebt **Arnauld** folgende Tabelle:

1) $b \,.\, c :: f \,.\, g$ } *Principale,*
2) $f \,.\, g :: b \,.\, c$ } *Equivalente,*
3) $c \,.\, b :: g \,.\, f$ } *Permutation,*
4) $g \,.\, f :: c \,.\, b$ } *Equivalente,*
5) $b \,.\, f :: c \,.\, g$ } *Alterne,*
6) $c \,.\, g :: b \,.\, f$ } *Equivalente,*
7) $f \,.\, b :: g \,.\, c$ } *Permutation de l'Alterne,*
8) $g \,.\, c :: f \,.\, b$ } *Equivalente.*

Davon sind drei für den Geometer wichtig: 1), 3) und 5).

Buch III handelt vom zusammengesetzten Verhältnis (*Des raisons composées*). Arnauld versteht das Produkt von Verhältnissen darunter. Es werden hier viele Sätze, die man jetzt nicht mehr in Worten auszusprechen pflegt, erörtert und bewiesen, z. B.:

Das Verhältnis einer Gröfse mehrerer Dimensionen zu einer homogenen Gröfse (von ebensoviel Dimensionen) ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen jeder Dimension der ersteren Gröfse zu der entsprechenden Dimension der anderen Gröfse.

Wir heben folgende Sätze hervor: In einer stetigen Proportion ist das Verhältnis zweier Terme eine *raison douplée, triplée* u. s. w. des Verhältnisses zweier unmittelbar sich folgender Terme, je nachdem jene ersteren durch einen Term (d. h zwei Intervalle) oder zwei Terme getrennt sind, z. B. ist in

$$\div a \,.\, b \,.\, c, \quad \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \left(\textit{raison douplée} \text{ von } \frac{b}{c}\right).$$

Das Produkt zweier Gröfsen ist mittlere Proportionale zwischen ihren Quadraten. In einer geometrischen Progression verhalten sich die Cuben zweier sich unmittelbar folgender Glieder wie zwei Glieder, zwischen welchen drei Intervalle liegen.

Beweis. Wenn

$$\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f,$$

so ist

$$bb \,.\, cc :: c \,.\, f,$$

also

$$bbf = ccc \quad \text{und} \quad bbb : bbf = b : f,$$

also

$$bbb : ccc = b : f.$$

Auf diesem Wege ist man zur Würfelverdoppelung gelangt. Denn wenn der gegebene Würfel bbb ist, hat man $f = 2b$ zu nehmen, wenn man nun zwischen b und f zwei mittlere Proportionalen einschiebt, so dafs $\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$, so ist der Cubus der ersten mittleren Proportionale das Doppelte des Cubus von b.

Allgemein kann man genannten Satz so aussprechen: Die Cuben zweier beliebiger Glieder einer stetigen geometrischen Proportion verhalten sich wie zwei Glieder derselben Proportion, zwischen denen dreimal soviele Intervalle liegen wie zwischen den beiden erstgenannten Gliedern.

Aus den folgenden Sätzen möge noch der herausgegriffen werden, weil er für die Art des Aussprechens von Sätzen charakteristisch ist, die wir heute einfach mechanisch nach den Regeln der Multiplikation und Division in Anwendung zu bringen pflegen:

Zwei gleiche *„grandeurs planes“* (Produkte zweier Faktoren) sind

immer reciprok; d. h. die beiden Dimensionen der einen sind die äufseren Glieder einer Proportion, deren innere Glieder die Dimensionen der andern bilden (Dimension ist der eine Faktor des Produkts).

Von zwei Verhältnissen heifst dasjenige gröfser, welches der *raison d'égalité* (der Einheit) näher kommt. Hier hat Arnauld offenbar nur echte Brüche im Sinn.

Zur Vergleichung der Verhältnisse hinsichtlich ihrer Gröfse lehrt Arnauld weiter das Verfahren auf gemeinsamen Nenner zu bringen.

Damit schliefst in der Ausgabe von 1667 das III. Buch.

Der Titel des IV. Buches lautet: *Des Grandeurs Commensurables et Incommensurables.*

Inkommensurabel heifsen zwei Gröfsen, wenn sie sich nicht verhalten wie zwei Zahlen. Wenn zwei Gröfsen inkommensurabel sind, dagegen ihre Quadrate oder Cuben kommensurabel, nennt Arnauld diese Gröfsen *„incommensurables en elles mêmes, en longeur"* oder *„lineairement"*. Die teilerfremden Terme des reduzierten Bruches, durch welchen ein Verhältnis (*raison de nombre à nombre*) gemessen wird, heifsen *„Exposans de cette raison"*. Hier betont Arnauld nochmals den Unterschied bei der Stellung von Ziffern und Buchstaben. Erstere sind nebeneinander gestellt addiert, letztere multipliziert.

Man darf bei Ziffern die Reihenfolge nicht ändern; im Produkt der Buchstaben ist sie gleichgültig.

Durch zwei nebeneinandergestellte gleiche Buchstaben wird eine Quadrat-, durch drei eine Cubikzahl bezeichnet. Überhaupt stellt jede Nebeneinanderstellung von Buchstaben, welche genau in zwei gleiche Hälften zerlegt werden können, eine Quadratzahl dar, z. B. *bbccdd*, die Wurzel derselben ist *bcd*. Daraus folgt ohne Beweis, dafs das Produkt zweier Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist, ebenso für Cubikzahlen.

Um eine Gröfse zum Zweck der Vergleichung mit einer andern auf ebensoviele Dimensionen zu bringen, fügt Arnauld eins, zwei u. s. w. *i* hinzu, einen Buchstaben, den er zur Bezeichnung der reellen Einheit reserviert. Zwei Gröfsen, die, beide zum Quadrat erhoben, sich verhalten wie zwei Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, stehen in keiner *raison de nombre à nombre* (unter *nombre* wird immer eine rationale Zahl verstanden), ferner: Zwei Gröfsen, deren *raison douplée* oder *triplée* (d. h. das Verhältnis ihrer Quadrate oder Cuben) nicht gleich ist einem Verhältnis, dessen Exposans beide Quadrat- oder Cubikzahlen sind, stehen in keiner *raison de nombre à nombre;* umsomehr verhalten sich Gröfsen nicht wie (rationale) Zahlen, wenn schon ihre Quadrate oder Cuben sich nicht verhalten wie (rationale) Zahlen. Zwei Gröfsen dieser Art heifsen inkommensurabel.

Wenn drei Gröfsen in stetiger Proportion stehen und die erste und dritte nach vollzogener Reduktion nicht wie zwei Quadratzahlen sich verhalten, so ist die erste und zweite und die zweite und dritte Gröfse linear inkommensurabel; ihre Quadrate dagegen kommensurabel.

Beweis. Das Verhältnis der ersten zur dritten ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen der ersten zur zweiten und der zweiten zur dritten. Da diese beiden letzteren Verhältnisse aber gleich sind, so können sie keine *raisons de nombre à nombre* sein, wenn ihre Multiplikation nicht das Verhältnis zweier Quadratzahlen ergiebt; es sind also *raisons sourdes*. Zwei Gröfsen sind inkommensurabel oder bilden eine *raison sourde*, ist aber gleichbedeutend.

In Zeichen:

$$\therefore k \,.\, l \,.\, m$$

$$k \,.\, m :: 3 \,.\, 4$$

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} \quad \text{und} \quad \frac{k}{l} = \frac{l}{m},$$

da $\frac{k}{m} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} = \frac{3}{4}$ ist, so kann $\frac{k}{l}$ und $\frac{l}{m}$ nicht das Verhältnis zweier (rationaler) Zahlen sein; dagegen $\frac{k^2}{l^2} = \frac{k}{m} = \frac{3}{4}$, also k^2 und l^2 kommensurabel.

Wenn das Verhältnis der ersten zur dritten Gröfse sich nicht durch zwei (rationale) Zahlen darstellen läfst, so ist die zweite und dritte, und die erste und zweite linear und quadratisch inkommensurabel.

Wenn vier stetig proportionale Gröfsen gegeben sind und die erste zur vierten sich verhält wie eine Cubikzahl zu einer anderen Cubikzahl, so verhält sich die erste zur zweiten wie die erstere Cubikzahl zur Wurzel aus der zweiten $\times$ dem Quadrat der Wurzel der ersteren Cubikzahl, und die dritte Gröfse zur vierten wie das Produkt der Wurzel der ersteren Cubikzahl in das Quadrat der Wurzel der zweiten Cubikzahl zur zweiten Cubikzahl.

$$\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$$

$$b \,.\, f :: \begin{cases} 8 \,.\, 27 \\ xxx \;\; yyy \end{cases}$$

also

$$\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$$

$$\div 8 \,.\, 12 \,.\, 18 \,.\, 27$$

$$\therefore xxx \,.\, xxy \,.\, yyx \,.\, yyy.$$

Wenn die erste und vierte sich nicht wie zwei Cubikzahlen verhalten, so ist die erste und zweite, die zweite und dritte, sowie die dritte und vierte linear [und quadratisch] inkommensurabel, und erst deren Cuben sind kommensurabel.

Denn wenn

$$\div k \,.\, l \,.\, m \,.\, n \quad \text{und} \quad k \,.\, n :: 3 \,.\, 4,$$

so ist

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{m}{n},$$

und da $\frac{k}{l} = \frac{l}{m} = \frac{m}{n}$ ist, kann keines dieser drei Verhältnisse rational sein. Dagegen $\frac{k^3}{l^3} = \frac{l^3}{m^3} = \frac{m^3}{n^3} = \frac{k}{n}$ rational. Wenn endlich das Verhältnis der ersten zur vierten Gröfse eine *raison sourde* ist, so sind die Verhältnisse der zweiten zur dritten, der ersten zur zweiten und der dritten zur vierten irrational; linear und cubisch inkommensurabel jene Gröfsen selbst. Wenn zwei quadratische Gröfsen sich nicht verhalten wie zwei rationale Zahlen oder wenigstens nicht wie zwei Quadratzahlen, so sind ihre Wurzeln inkommensurabel.

Wenn drei Gröfsen eine stetige Proportion bilden und die gröfste der Summe der beiden andern gleich ist, so sind sie absolut inkommensurabel.

Eines der Glieder ist, wenn die drei Gröfsen sich wie Zahlen verhalten würden, nach möglichster Reduktion jedenfalls ungerade, die beiden andern gerade, oder beide ungerade. Die auferlegte Bedingung schliefst also aus, dafs die drei Gröfsen, zu je zwei ein Verhältnis bildend, sich wie (rationale) Zahlen verhalten können.

Den letzten Abschnitt des vierten Buches bilden Sätze über Quadratzahlen, welche die Summe zweier Quadratzahlen sind, also die Konstruktion rationaler rechtwinkliger Dreiecke ermöglichen.

Arnauld giebt in der ersten Auflage folgende Regel: Die gröfsere Hälfte einer ungeraden Quadratzahl ist die Wurzel eines Quadrats, welches gleich der Summe zweier Quadrate ist.

Beweis: $(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$ ist jedenfalls dann Summe zweier Quadrate, wenn $\overline{2b+1}$ Quadratzahl ist; seiner Form nach ist aber $2b+1$ ungerade; $b+1$ nennt Arnauld gröfsere Hälfte von $\overline{2b+1}$.

Arnauld giebt zur Berechnung rationaler rechtwinkliger Dreiecke folgende Tabelle bei, deren erste Kolonne eine arithmetische Progression der Differenz 4 enthält; die zweite Kolonne füllen die Triangularzahlen der ersteren; in der dritten stehen dieselben Triangularzahlen je um Eins vermehrt.

Die vierte Kolonne bringt die natürlichen ungeraden Zahlen, beginnend mit 3; die fünfte die Quadrate der Zahlen der vierten, die sechste die Quadrate der Zahlen der zweiten; die siebente Kolonne endlich die Quadrate der Zahlen der dritten; also:

I	II	III	IV	V	VI	VII
4	4	5	3	9	16	25
8	12	13	5	25	144	169
12	24	25	7	49	576	625
16	40	41	9	81	1600	1681
20	60	61	11	121	3600	3721
24	84	85	13	169	7056	7225
28	112	113	15	225	12544	12769
32	144	145	17	289	20736	21025
36	180	181	19	361	32400	32761
40	220	221	21	441	48400	48841

Die Zahlen in der fünften Kolonne sind die Summe der entsprechenden in der zweiten und dritten; die der siebenten die Summe der entsprechenden in der fünften und sechsten Kolonne.

In der ersten Ausgabe folgt noch ein Kapitel *„De la Proportion entre les aliquotes de la même grandeur"*, in welchem die Verhältnisse von Quotienten zu Quotienten besprochen werden.

Hier werden die geometrischen Reihen

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdots$$
$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} \cdots$$
$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} \cdots \text{ u. s. w.}$$

ins Unendliche fortgesetzt und ihre Summen zu 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. bestimmt. Zum Beweise trägt Arnauld $bx = \frac{1}{3} bz$ von einem festen Anfangspunkt aus auf einer Geraden ab, ferner trägt er $bc = \frac{1}{4} bz$ auf; dann verhält sich $bx : bc = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$, also ist $cx = \frac{1}{3} bc$, man hat also cx in 4 gleiche Teile zu teilen und drei zu behalten, um $\frac{1}{16} bz$ zu bekommen, da $cx = \frac{1}{12} bz$

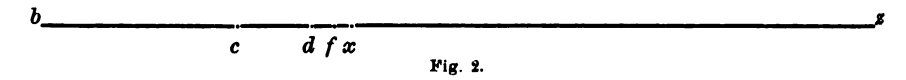


Fig. 2.

ist, also $\frac{3}{4} cx = \frac{3}{48} bz = \frac{1}{16} bz$; nun heifse $\frac{3}{4} cx$ cd; dann ist $dx = \frac{1}{4} cx$ ein Drittel von cd; fährt man so fort, teilt entsprechend dx in vier gleiche Teile, sodafs $\frac{3}{4} dx = df$, so ist zunächst $df = \frac{3}{4} dx = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} bc = \frac{1}{64} bz$; um das nächste Glied der geometrischen Reihe zu erhalten, hätte man fx in vier gleiche Teile zu teilen und $fg = \frac{3}{4} fx$ ergäbe das Glied $\frac{1}{256} bz$ der Reihe. Man sieht, dafs die Werte bc, bd, bf, bg u. s. w. (die Partialsummen) alle unter bx bleiben und erst nach *„subdivisions infinies"* die Stelle x erreichen. Mit dieser Kenntnis wird sich Arnauld genau des Sophismas bewufst, welches der sogenannte Achilles des Zeno enthält. Denn

wenn die Schildkröte eine Meile Vorsprung hat und Achill zehnmal so schnell läuft, so beträgt die Summe der Strecken, welche die Schildkröte macht, $\frac{1}{9}$ (einer Meile) $= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} +$ in inf. und Achill wird $\frac{10}{9}$ zurücklegen, während jene $\frac{1}{9}$ kriecht, also wird Achill sie am Ende des $\frac{1}{9}$ der zweiten Meile einholen. Eine verwandte Aufgabe schliefst Arnauld an: Wenn eine Uhr Stunden- und Minutenzeiger hat, alle Punkte zu bezeichnen, wo die beiden sich begegnen.

Er (Arnauld) giebt die Lösung $1 + \frac{1}{11}$, $2 + \frac{2}{11}$, $3 + \frac{3}{11}$ u. s. w. bis $11 + \frac{11}{11} = 12$.

Wir sind bisher der ersten Ausgabe gefolgt. In den späteren sind die Bücher II, III, IV ziemlich umgearbeitet und etwas vermehrt. An der Spitze des II. Buches sagt Arnauld dort: Nichts sei in der Geometrie bisher schlechter behandelt worden als die Proportionen. Wirklich waren ja im Munde der Zeit die Proportionen der zweite Fleck neben der Parallelenlehre, welche den schönen Leib der Geometrie entstellten. Auch er (Arnauld) sei von dem, was er in der ersten Auflage seines Buches zum Druck gegeben, nie so ganz befriedigt gewesen. Unterdessen habe ihm ein flamländischer Edelmann Mons. de Nonancourt eine Abhandlung zu lesen gegeben, deren Urheber jener sei: *Euclides logisticus sive de ratione Euclidea;* diese habe ihm so gefallen, dafs er manches davon in sein Buch übernommen habe. Nicht alle Leute waren der Ansicht, dafs die späteren Zusätze vorteilhaft waren, uud auch wir müssen, nachdem wir beide Versionen kennen gelernt haben, der ursprünglichen Klarheit der ersten Ausgabe den Vorzug geben. Hervorheben wollen wir aus den späteren Fassungen nur den Beweis für die Gleichheit zweier Verhältnisse unter der notwendigen und hinreichenden Bedingung, dafs alle *aliquotes pareilles* der Antecedenten gleich oft in den Consequenten enthalten sind. Er lautet: Wären die beiden Verhältnisse unter obiger Bedingung auch nur um eines Haares Breite ungleich, so könnte man im Nenner des gröfseren $\frac{B}{C}$ eine Gröfse Z addieren, welche die Gleichheit mit $\frac{F}{G}$ herstellen würde. Dann könnte man den aliquoten Teil X von B so wählen, dafs er in Z enthalten wäre, und dann wäre X in C mindestens einmal mehr enthalten wie der „*aliquote pareille*“ Y von F in G. Damit ist die Annahme der Ungleichheit der beiden Verhältnisse unter erfüllter obiger Bedingung ad absurdum geführt.

In den späteren Auflagen sind die Sätze über Quadratzahlen vermehrt.

Zuerst wird der Satz $(bb - cc) = (b + c)(b - c)$ in Worten ausgesprochen.

Hieran schliefst sich die Aufgabe, die Quadrate zu finden, welche eine gegebene Differenz h besitzen.

Lösung: Der Quotient aus h und einem beliebigen seiner Teiler sei $q = \frac{h}{d}$; nimmt man als Wurzel der einen Quadratzahl $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$, als Wurzel der andern $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$, so genügt die Differenz der Quadrate dieser Werte der Aufgabe.

Speziell kann man als Teiler d auch die Einheit benützen.

II. Aufgabe: Alle Zahlen zu bestimmen, deren Quadrat Summe zweier Quadrate ist.

Lösung: Jede Zahl, welche selbst Summe zweier (verschiedener) Quadratzahlen ist, hat die Eigenschaft, dafs ihr Quadrat Summe zweier Quadrate ist.

Beweis. Es sei $bb + cc$ eine solche Zahl, dann ist

$$(bb + cc)^2 = b^4 + c^4 + 2bbcc$$
$$(bb - cc)^2 = b^4 + c^4 - 2bbcc,$$

also

$$(bb + cc)^2 = 4bbcc + (bb - cc)^2;$$

hier ist aber $4bbcc$ sicher Quadratzahl, weil sie sich in genau zwei gleiche Faktoren $2bc$ zerspalten läfst.

I. Corollar: Im speziellen kann $cc = 1$ sein; also jede Quadratzahl $+1$ hat die Eigenschaft, dafs ihr Quadrat Summe zweier Quadrate ist; die Wurzel des einen dieser Summanden ist die ursprüngliche Quadratzahl -1, die des andern die doppelte Wurzel der ursprünglichen Quadratzahl.

$$(bb + 1)^2 = 4bb + (bb - 1)^2.$$

II. Corollar: Das Quadrat der gröfseren Hälfte einer ungeraden Quadratzahl ist die Summe zweier Quadrate.

$$(n + 1)^2 = n^2 + \overline{2n + 1}$$

und $(n + 1)^2$ ist Summe zweier Quadrate, wenn $2n + 1 = hh$ ist.

Es könnte nun jemand den Einwand machen, es könnte aufser den Zahlen, welche Summe zweier Quadrate sind, noch andere geben, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Arnauld sagt: Ich leugne die Folge. Dann müfste es unter den gröfseren Hälften ungerader Quadratzahlen auch solche geben, welche nicht Summe zweier Quadrate sind.

Diesen Nachweis, dafs wirklich alle gröfseren Hälften ungerader Quadratzahlen Summe zweier Quadrate sind, kann man aber so führen:

Eine jede ungerade Quadratzahl $(2a + 1)^2$ hat die Form $2n + 1$, also:

$$2n + 1 = (2a + 1)^2 = [\underbrace{(a + 1) - a}_{1}]^2 + 4a(a + 1)$$
$$= 1 + 4a(a + 1)$$
$$n = 2a(a + 1),$$

also

$$n + 1 = 2a(a+1) + 1 = 2a^2 + 2a + 1,$$

endlich

$$n + 1 = a^2 + (a^2 + 2a + 1) = a^2 + (a+1)^2.$$

Die gröfsere Hälfte der ungeraden Quadratzahl läfst sich also darstellen als Summe der Quadrate der gröfseren und der kleineren Hälften der Wurzel der ungeraden Quadratzahl.

III. Corollar: Das Doppelte einer Zahl, welche Summe zweier Quadratzahlen ist, ist ebenfalls Summe zweier Quadratzahlen; nämlich des Quadrats der Summe der Wurzeln der beiden Componenten der ursprünglichen und des Quadrats der Differenz jener Wurzeln.

$$2(bb + cc) = 2bb + 2cc = (b+c)^2 + (b-c)^2.$$

IV. Corollar: Dasselbe gilt für die Hälfte

$$\tfrac{1}{2}(bb + cc) = \tfrac{1}{2}bb + \tfrac{1}{2}cc = (\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c)^2 + (\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c)^2.$$

Hieran schliefsen sich Probleme zur Auffindung von Zahlen, welche in bestimmter Ordnung aufeinanderfolgen.

1) Wird die Summe einer arithmetischen Progression bestimmt, wenn man den ersten und letzten Term und die Anzahl der Terme kennt.

2) Wird die Summe einer geometrischen Progression bestimmt.

Im III. Problem behandelt Arnauld die Triangular- und Pyramidalzahlen.

Wir finden eine Tafel derselben in Gestalt eines Rechtecks:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	

Es handelt sich darum, die Summe beliebig vieler Terme eines Bandes (einer Zeile) zu finden: *Ex definitione* ist es dasselbe, z. B. die Summe der 10 ersten Triangularzahlen oder die zehnte Pyramidalzahl anzugeben. Um dieselben zu finden, hat man den Ansatz $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. *Arnauld sagt, dafs er die Regel hierfür von einem sehr geschickten Manne habe (que je tiens d'un fort habile homme).* Damit ist wieder Pascal gemeint; denn Pascal hat dieselbe gefunden; sie wurde nach Pascals Tod im *„Triangle*

arithmétique" Pascals im Jahre 1665 publiziert. Wir können hierfür auf M. Cantors „*Vorlesungen*" Bd. II S. 751 verweisen. Wir brauchen folgenden die von M. Cantor angewendete Schreibweise.

Allgemein heifst die von Arnauld gegebene Regel für die Berechnung von $(r)_K$ (Kte Zelle der $r$ten Zeile):

$$(r)_K = \frac{K(K+1)(K+2)\cdots(K+r-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)},$$

während die Vorschrift im *Triangle arithmétique* lautet:

$$(r)_K = \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+K-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(K-1)}.$$

Die Verschiedenheit der beiden Vorschriften ist erklärt durch das Gesetz $(r)_K = (K)_r$.

Als ersten Satz über Triangularzahlen giebt er in obiger Bezeichnungsweise:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2,$$

nach Arnaulds Regel ist:

$$(3)_K = \frac{K(K+1)}{1\cdot 2} \quad \text{und} \quad (3)_{K-1} = \frac{(K-1)K}{1\cdot 2},$$

folglich:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = \frac{K[(K+1)+(K-1)]}{1\cdot 2} = \frac{K\cdot 2K}{1\cdot 2},$$

also:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = K^2$$

in $(r)_K$ wird für $r = 3$ ja $(r-1)_K = (2)_K$, und hier wird speziell $(2)_K = K$, also:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2.$$

Die zweite Eigenschaft dieser Zahlreihen

$$(r)_K - (r)_{K-1} = (r-1)_K$$

wird *ex definitione* gefolgert.

$$(r)_K = \sum_1^K (r-1)_\nu \quad \text{und} \quad r_{K-1} = \sum_1^{K-1} (r-1)_\nu,$$

also:

$$(r)_K - (r)_{K-1} = (r-1)_K.$$

Eine dritte Eigenschaft besteht darin, fährt Arnauld fort, dafs in obiger Reihe der natürlichen Zahlen jede ungerade Quadratzahl — 1, die durch 8 teilbar ist, 8 sovielmal enthält, als die kleinere Hälfte der Wurzel jener Quadratzahl durch ihre Triangularzahl Einheiten angiebt; mit der vorher angewendeten Bezeichnung. $\frac{[(2)_K]^2 - 1}{8} = (3)_\lambda$, wenn K die Form hat $2\lambda + 1$ [da $(2)_K = K$ und $(2)_\lambda = \lambda$ ist].

Der erste Satz über die Triangularzahlen (so genannt bei Arnauld, sonst gewöhnlich Triagonalzahlen) wird benützt, um die Summe der m ersten Quadrate abzuleiten. Diese muſs die entsprechenden Triangularzahlen je zweimal enthalten, auſser der letzten, welche sie nur einmal enthält. So ergiebt sich aus der allgemeinen Regel für die Bildung der $m$ten Pyramidalzahl, welche die Summe der m ersten Triangularzahlen darstellt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots m^2 = 2\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}.$$

Dies läſst sich schreiben:

$$\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\left[\frac{2(m+2)}{3} - 1\right];$$

$\frac{2(m+2)}{3}$ ist aber gleich:

$$\frac{(2m+1)+3}{3} = \frac{2m+1}{3} + 1;$$

folglich der Ausdruck in der eckigen Klammer $\frac{2m+1}{3}$ und die Summe der m ersten Quadrate:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Um aus der Summe der ersten m natürlichen Zahlen die der ersten m Quadrate abzuleiten, hat man die erstere $\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$ mit dem Faktor $\frac{2m+1}{3}$ zu multiplizieren. Auch die Ableitung der Summe der ersten m Cuben wird von Arnauld mit Hilfe seiner Tafel gelehrt.

Es ist:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2$$
$$(3)_K - (3)_{K-1} = [(2)_K],$$

also

$$[(3)_K + (3)_{K-1}]\,[(3)_K - (3)_{K-1}] = [(2)_K]^3$$

oder

$$[(3)_K]^2 - [(3)_{K-1}]^2 = [(2)_K]^3.$$

Mit Hilfe dieser Relation bestimmt Arnauld durch successive Substitution der Cuben die Summe der ersten m Cuben.

$$[(3)_m]^2 = [(2)_m]^3 + [(3)_{m-1}]^2$$
$$[(3)_{m-1}]^2 = [(2)_{m-1}]^3 + [(3)_{m-2}]^2$$
$$[(3)_{m-2}]^2 = [(2)_{m-2}]^3 + [(3)_{m-3}]^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(3)_2]^2 = [(2)_2]^3 + [(3)_1]^2$$
$$[(3)_1]^2 = [(2)_1]^3 + [(3)_0]^2,$$

oder, da allgemein $[(2)_K]^3 = K^3$ ist, aufsteigend:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots (m-1)^3 + m^3 = [(3)_m]^2 = \left[\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right]^2$$

[in der gebräuchlicheren Form $\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$]; hieraus folgt:

$$1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots m^3 = [1 + 2 + 3 \cdots m][1 + 2 + 3 \cdots m].$$

Arnauld giebt das spezielle Beispiel $m = 6$, die Triangularzahl von m schreibt er $\dot{m}$, also:

$$\dot{6}^2 = \begin{cases} 6^3 \\ + \\ \dot{5}^2 = \end{cases} \begin{cases} 5^3 \\ + \\ \dot{4}^2 = \end{cases} \begin{cases} 4^3 \\ + \\ \dot{3}^2 = \end{cases} \begin{cases} 3^3 \\ + \\ \dot{2}^2 = \end{cases} \begin{cases} 2^3 \\ + \\ \dot{1}^2 = \end{cases} \begin{cases} 1 \\ + \\ 0\,. \end{cases}$$

Um die Triangularzahl einer beliebigen Zahl zu finden, giebt Arnauld folgende Regeln: 1) wenn die natürliche Zahl ungerade ist, multipliziere man sie mit ihrer gröfseren Hälfte; wenn sie also die Form hat $(2n+1)$, so ist:

$$\overset{\frown}{2n+1} = (2n+1)(n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2}.$$

2) für eine gerade nehme man die Hälfte und multipliziere damit die ursprüngliche, zu der man 1 addiert hat, d. h.

$$\overset{\frown}{2n} = n(2n+1) = \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2}$$

im Einklang mit der allgemeinen Regel.

Wir kehren zur ersten Ausgabe von 1667 zurück. Mit dem V. Buche beginnt die eigentliche Elementargeometrie; wie schon die ersten Worte anzeigen: *„Nous avons parlé jusque icy de la grandeur en général. Il faut maintenant descendre à ses especes"*. Jede Gröfse ist entweder *continüe* (stetig) wie Zeit, Bewegung, Raum, oder unstetig wie die Zahl. Letztere Auffassung ist insofern bei Arnauld konsequent, weil er unter den Zahlen nur rationale versteht, die ja kein Continuum bilden.

Das Kontinuierliche ist entweder ein aufeinander Folgendes (*successive*) oder ein nebeneinander Beharrendes (*permanente*), wie der Raum. Durch Abstraktion gelangt man zu Gebilden von weniger als drei Dimensionen. Man gelangt zu den *surfaces*, diese unterscheiden sich in *surfaces courbes* und *surfaces plates* = *plans* (Ebenen). Man gelangt weiter zu den *lignes courbes* und *lignes droites*. Der Punkt wird als Grenze der Geraden definiert; er ist unteilbar (*indivisible*). Ebenso ist die Linie Grenze der Fläche, und die Fläche Grenze des Körpers.

Der Begriff der Ebene und der Geraden erscheint Arnauld als durch natürliche Anschauung gewonnen so einfach, dafs man ihn nur verdunkeln würde, wollte man eine Definition geben; man braucht sich dafür nur auf

das normale Bewufstsein zu berufen. (*„Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle même, et que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot.“*) Man kann aber gewisse Eigenschaften, welche in jener Anschauung enthalten sind, erklärend anführen, z. B. Archimeds Axiom, dafs die Gerade die kürzeste Entfernung zweier Punkte sei. Als II. Axiom wird die Bestimmtheit einer und nur einer Geraden durch zwei Punkte angeführt. Als Axiom III bedinge die Einfachheit der geraden Linie ihre unendliche Verlängerbarkeit.

Im Axiom IV wird festgestellt, dafs zwei Gerade ganz zusammenfallen, wenn sie eine Strecke gemein haben.

Axiom V: Zwei Gerade schneiden sich in einem und nur einem Punkte.

Das VI. Axiom fällt seinem Inhalt nach mit der berüchtigten fünften Forderung Euklids zusammen: *„Deux lignes droites qui estant prolongées vers un même costé s'approchent peu à peu se couperont à la fin.“* Arnauld fügt hinzu: *„Euclide prend cette proposition pour un principe et avec raison: car elle a assez de clarté pour s'en contenter et ce seroit perdre de temps inutilement que de se rompre la tête pour la prouver par un long circuit.“* Die Nutzlosigkeit der Beweisversuche hat also Arnauld klar durchschaut, aber von der Geltung der Forderung ist er überzeugt.

Im zweiten Abschnitt dieses Buches wird die Entstehung der Kreislinie durch Drehung (Bewegung) einer Strecke um den einen festen Endpunkt definiert.

Daraus fliefst sofort die Eigenschaft eines Kreises von einer *„entiere uniformité“* (von einer vollständigen Gleichförmigkeit, d. h. von überall gleicher Krümmung zu sein), woraus viele Eigenschaften des Kreises ohne weiteres folgen, z. B. Bogen über gleich langen Sehnen desselben Kreises sind gleich.

Der dritte Abschnitt handelt von den Senkrechten. Wenn eine Gerade eine andere so schneidet, dafs sie gegen die eine Seite der zweiten (inbezug auf den Schnittpunkt) sich nicht mehr neigt als gegen deren andere Seite, so sollen die zwei Geraden senkrecht zu einander heifsen (*perpendiculaires l'une à l'autre*).

Man darf Neigung (*obliquité*) nicht mit Krümmung (*curvité*) verwechseln, erstere hängt von der Lage, letztere von der Natur der Linie ab.

Eine genauere Definition der Senkrechten, welche hier wiederholt wird, haben wir schon in Arnaulds *Logik* kennen gelernt. Nämlich: wo zwei Punkte einer Geraden von zwei festen Punkten einer zweiten Geraden je gleichen Abstand besitzen, haben alle Punkte der ersteren diese Eigenschaft. Er legt grofses Gewicht auf diese Definition, da sie einen wesentlichen Bestandteil bilde für die natürliche Ordnung der Sätze; denn ohne dieselbe

müfste man Winkel beiziehen, und diese werden als flächenhafte Gebilde erst viel später eingeführt.

Alle Geometer sind von der Evidenz dieses Satzes überzeugt. Die Bestimmtheit einer Geraden durch zwei ihrer Punkte ist für Arnauld aufser jedem Zweifel; wollte man zum Beweise jenes Satzes Dreiecke heranziehen, so würde man die Eigenschaften von Linien durch kompliziertere flächenhafte Gebilde zu beweisen suchen, was wieder ein grober Verstofs gegen einen natürlichen Aufbau wäre: *„Soit donc de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen très facile de demonstrer les Problemes suivans sans se servir des triangles comme fait Euclide."*

Es folgen die Aufgaben:

1) Von einem Punkte aufserhalb auf eine Gerade ein Perpendikel zu fällen.
2) in einem Punkte einer Geraden eine Senkrechte auf derselben zu errichten,
3) eine gegebene Strecke zu hälften,

die alle mit Hilfe von Kreisbogen gelöst werden.

I. Theorem: Die Senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, die von einem Punkte nach einer Geraden hin gezogen werden können.

II. Theorem: Aus einem Punkte kann man nur *ein* Lot auf eine Gerade fällen und in einem Punkte einer Geraden nur *eine* Senkrechte auf ihr errichten.

Das I. Theorem wird durch Verlängerung der Senkrechten aus dem gegebenen Punkte um sich selbst nach der andern Seite der Geraden unter Zuhilfenahme einer beliebigen schiefen Transversalstrecke nach der gegebenen Geraden hin und Verbindung des Schnittpunktes mit dem andern Endpunkt der Senkrechten auf Grund des Archimedischen Prinzips bewiesen. Der Beweis des zweiten Satzes ist indirekt.

Die Senkrechte ist also das natürliche Mafs des Abstandes eines Punktes von einer Geraden. Aus dem zweiten Theorem wird die Folgerung gezogen, dafs zwei Gerade, welche auf derselben Geraden senkrecht sind, keinen Punkt gemein haben können, da es sonst einen Punkt geben würde, von dem sich zwei Senkrechte auf eine Gerade fällen liefsen.

Zieht man von einem Punkte aufserhalb eine beliebige Schnittgerade (*oblique*) gegen eine andere Gerade, so fällt das aus jenem Punkte herabgelassene Lot auf die Seite der zweiten Geraden, gegen welche die schiefe Schnittgerade (*oblique* — inbezug auf deren Schnittpunkt) geneigt ist. Andernfalls wäre die Senkrechte und das Lot nicht mehr identisch, sondern dieses *a fortiori oblique*.

III. Theorem: Die unbegrenzte Senkrechte, welche den Abstand zweier Punkte halbiert, ist der Ort aller Punkte der Ebene, welche von jenen beiden Punkten gleiche Abstände besitzen.

Der vierte Abschnitt ist überschrieben: *„Des lignes droittes obliques"*.

Unter *oblique* versteht Arnauld jede Gerade, welche eine andere schneidet, aufser der senkrechten.

Um ohne Hilfe von Winkeln die Länge einer *oblique* zu beurteilen, d. h. die Strecke zwischen dem Punkte, den sie mit der Senkrechten gemein hat, und ihrem Schnittpunkt mit der Geraden, gegen welche sie *„oblique"* ist, nennt Arnauld 1) jene Länge *„oblique"* schlechthin (d. h. die Hypotenuse unseres entstehenden rechtwinkligen Dreiecks);

2) die Kathete, welche mit der geschnittenen Geraden zusammenfällt: *„éloignement du perpendicule"*; die andere Kathete heifst *„perpendiculaire"*.

Nun heifst sein Satz (in moderner Aussprache): Die *„obliques"* eines Büschels, welcher eine gegebene Gerade aus einem Punkte projiziert, sind um so länger, je gröfser das *„éloignement du perpendicule"* ist.

Auch dieser Satz wird mit Hilfe eines gebrochenen Linienzugs nach dem Archimedischen Axiom bewiesen, indem die Senkrechte um sich selbst verlängert wird.

Sieht man aber die geschnittene (projizierte Gerade) als Senkrechte an (d. h. dreht man die Figur um 90^0), so ergiebt sich, dafs unter den *obliques*, die durch einen Punkt einer Geraden hindurchgehen, diejenige die längste ist, welche die gröfste *„perpendiculaire"* besitzt.

Die Kongruenzsätze am rechtwinkligen Dreieck:

Die Gleichheit 1) der Hypotenusen und einer Kathete;

2) der beiden Katheten

bedingen die Gleichheit der dritten Seite, werden so ausgesprochen: *„Des trois lignes que nous avons dit se devoir considerer dans les lignes obliques: la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, et l'oblique même, deux ne peuvent estre égales que la troisiéme ne le soit aussy."* Die Beweise werden aber nicht durch *„zur Deckung bringen"* geführt. Arnauld nennt dies *„une preuve grossiere et materielle"*.

Als Corollar: Es ist unmöglich, dafs ein Punkt von drei Punkten einer Geraden gleichen Abstand besitze.

Es werden weiter die Fälle untersucht, wenn nur Gleichheit in einem Bestimmungsstücke herrscht.

Als letztes Theorem dieses Buches erscheint mit den Bezeichnungen *obliques* u. s. w. der Satz, dafs in kongruenten schiefwinkligen Dreiecken die Höhen gleich sind.

Es ist Arnauld also gelungen, mit Hilfe der Axiome und gewählten

Bezeichnungen diese Sätze ohne Hilfe von Winkeln und Dreiecken, die bei ihm immer als begrenztes Stück einer Ebene gelten, wie wir vorgreifend bemerken (*„On appelle figure dans ces elémens de Géométrie une surface platte terminée de tous costez“* Anfang von Buch XII) abzuleiten, auszusprechen und zu beweisen.

Buch VI ist den Parallelen gewidmet: *Des lignes paralleles.* Die Parallelen können auf zwei Arten definiert werden. 1) negativ: Es sind Gerade (dafs sie in einer Ebene liegen, wurde schon im V. Buche vorausgesetzt: *„Lors que l'on compare plusieurs lignes ensemble, on les suppose toujours dans ces elémens comme estant posées, ou décrites sur un même plan c'est à dire sur une même superficie platte“*, und dadurch Arnaulds *Nouveaux Elémens* als Planimetrie gekennzeichnet), die bis ins Unendliche verlängert sich nie schneiden; 2) positiv: Parallel heifsen Gerade, die überall denselben Abstand besitzen. Die erste Definition, die negative, nennt Arnauld eine notwendige Folge der positiven. Dafs die positive Definition die unendliche Verlängerbarkeit involviert, wird von Arnauld ausdrücklich hervorgehoben.

Die drei Fundamentalsätze über Parallelen lauten:

1) Wenn zwei Gerade durch eine dritte geschnitten werden, welche auf beiden zugleich senkrecht ist, so sind alle Punkte der geschnittenen einen gleichweit von der andern entfernt und umgekehrt.

2) Wenn zwei Punkte einer Geraden gleichen Abstand besitzen von einer anderen Geraden, so sind alle Punkte einer jeden gleichweit entfernt von der andern Geraden.

3) Zwei Strecken, welche zwischen zwei Geraden liegen, können unter der Bedingung, dafs sie sich nicht kreuzen, nur dann gleich und je eine auf je einer der begrenzenden Geraden senkrecht sein, wenn alle beide auf beiden einschliefsenden (begrenzenden) Geraden senkrecht sind.

Corollare: 1) Die Umkehrung der positiven Definition (alle Lote zwischen Parallelen sind gleichlang). 2) Transversalen beliebiger Steigung (*les obliques entre paralleles*) sind länger als das Lot. Zum Beweise dieser Sätze schickt Arnauld acht Lemmen voran:

1) Wenn die Geraden x und z von einer andern geschnitten werden, welche zu x senkrecht, zu z aber schief ist, so sind alle andern auf x Senkrechten ebenfalls schief zu z und umgekehrt.

2) Die beiden Geraden mögen wieder von einer zu x Senkrechten, zu z Schiefen geschnitten werden, so sind alle andern ähnlichen Transversalen ($\perp$ zu x und schief zu z) ungleichlang.

3) Jede zu x Senkrechte (zu z Schiefe) und jede zu z Senkrechte (zu x Schiefe) sind, wenn sie innerhalb x und z keinen Punkt gemein haben,

wechselseitig verglichen ungleich lang (nämlich die Strecken innerhalb x und z, und diese versteht Arnauld immer unter den Transversalen).

4) Faſst die beiden vorhergehenden Hilfssätze in einen zusammen: Zwei zwischen zwei Geraden liegende Strecken, von denen je eine auf einer beliebigen jener beiden Geraden senkrecht ist und die sich nicht kreuzen, können nur dann gleich sein, wenn beide auf beiden Geraden zugleich senkrecht sind.

5) Wenn eine Transversalstrecke senkrecht ist zu beiden Geraden, so ist jedes Lot, das von einem Punkte der einen Geraden auf die andere gefällt wird, gleich jener ersteren Senkrechten, und folglich sind die Lote unter einander gleich.

Der Beweis wird indirekt mit Hilfe des Satzes, daſs aus einem Punkte nur eine Senkrechte gefällt werden kann, geführt.

6) Wenn eine Gerade senkrecht ist zu zwei andern, so sind alle Geraden, welche zu der einen senkrecht sind, zu beiden senkrecht, denn gäbe es auch nur eine, welche senkrecht wäre zur einen und schief zur andern Geraden, so müſsten nach dem 1. Lemma auch alle andern zur einen senkrecht, schief zur andern sein, was der Voraussetzung widerspricht.

7) Die Punkte einer Geraden sind von einer zweiten entweder alle gleich weit entfernt oder alle ungleich weit.

8) Die Punkte zweier sich schneidender Geraden sind — alle der einen — ungleich weit entfernt von der andern, und die kürzesten Abstände sind die in der Nähe des Schnittpunkts.

An die genannten Hauptsätze schlieſst sich die Aufgabe: Durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu konstruieren; sie wird von Arnauld auf drei Arten in Angriff genommen. Zuletzt mit Hilfe der inneren Wechselwinkel an einer beliebigen von dem Punkt ausgehenden Transversalen. Die Aussprache ist aber eine andere, da Arnauld den Winkel ja überhaupt noch nicht eingeführt hat. Er begründet seine Lösung durch den früher abgeleiteten, im Anschluſs an Euklid hier ausgesprochenen Satz, daſs in kongruenten Dreiecken die Höhen gleich sind. Den Schluſs des VI. Buches bilden dreizehn weitere Sätze über Parallelen. Z. B. durch einen Punkt kann zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gelegt werden; gleich geneigte Transversalstrecken zwischen Parallelen sind einander gleich und die am stärksten geneigten sind die längsten. Gleich geneigte nach derselben Seite (der Ebene) sind selbst parallel.

Die Abschnitte gleich geneigter Transversalstrecken auf den Parallelen sind gleich. Ungleich geneigte Transversalstrecken zwischen Parallelen können nicht gleich lang sein.

Hier wird das Parallelogramm eingeführt durch den Satz: „*Quatre*

lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont égales elles sont paralleles."

Der elfte Satz lautet: Wenn eine Gerade zwei andere schief schneidet und gegen beide nach derselben Seite (der Ebene) geneigt ist, so sind alle zur Schnittgeraden parallelen Transversalstrecken zwischen jenen beiden Geraden ungleich lang.

1. Corollar: Zwei derart geschnittene Gerade können nie parallel sein.

2. Da sie sich nach der Seite, nach welcher die dritte schneidende Gerade geneigt ist, annähern, so werden sie sich, unbegrenzt verlängert, endlich einmal schneiden (V, 11).

Der Gedankengang zum nächsten VII. Buch knüpft an die Begrenzung der Transversalen durch die Parallelen an, das VII. Buch führt also die Bezeichnung: *Des lignes terminées à une circonference.*

Es sind: 1) Sehnen,
2) Sekanten (*secantes interieurs et exterieurs*),
3) Tangenten.

Dazu kommt ein vierter Abschnitt vom Parallelismus von Kreislinien. Arnauld versteht darunter konzentrische Kreise.

I. Von den Sehnen.

1. Satz: Eine Gerade, die eine Sehne schneidet, kann drei Lagen haben, die sich auszeichnen:

1) senkrecht sein zur Sehne,
2) die Sehne hälften,
3) durch den Kreismittelpunkt gehen.

Zwei dieser Eigenschaften bedingen die dritte.

Wenn z. B. die beiden ersten Eigenschaften erfüllt sind, enthält die Mittelsenkrechte alle Punkte, welche von den Endpunkten der Sehne gleichen Abstand besitzen, das Centrum des Kreises ist aber ein solcher Punkt.

1. Corollar: Ein Kreis ist durch drei Punkte oder durch einen Punkt und das Centrum vollständig bestimmt (natürlich dürfen jene drei Punkte nicht in einer Geraden liegen).

2. Corollar: Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie ganz zusammen; denn sie haben dann das Centrum und einen Radius gemein.

3. Corollar: Drei Kreise können sich nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

2. Satz: Eine Mittelsenkrechte einer Sehne hälftet auch die beiden Bogen, welche die Sehne stützt; denn sie enthält alle Punkte, welche von den Endpunkten der Sehne gleiche Abstände besitzen; da diese Abstände aber wieder Sehnen sind für die beiden Durchschnittspunkte der Mittelsenkrechten mit dem Kreis, und gleiche Sehnen gleiche Bogen stützen im

gleichen Kreise, so sind die von der ursprünglichen Sehne gestützten beiden Bogen beide durch die Mittelsenkrechte jener Sehne gehälftet.

Das dritte Theorem giebt die Umkehrung des zweiten.

4. Theorem: Gleich weit vom Centrum abstehende Sehnen in gleichen Kreisen sind gleich und umgekehrt.

An sich ist das klar für Durchmesser, da sie alle dem Centrum gleich nahe sind, d. h. durch dasselbe gehen.

Auch ist ein Durchmesser gröfser als eine andere Sehne, wie aus dem Archimedischen Prinzip folgt, wenn man die Endpunkte der Nichtdurchmessersehne mit dem Centrum verbindet.

5. Theorem: In gleichen Kreisen stützt die gröfsere Sehne den gröfseren Bogen; denn trägt man die kleinere Sehne in den Kreis parallel zur gröfseren ein, so können die beiden sich nie schneiden, also liegt der kleinere Bogen ganz im gröfseren.

Es folgt die Definition des Sinus, für Bogen $< \frac{\pi}{2}$, sowie des Sinus versus an der Figur. Eine zweite Definition ist: Der Sinus ist die Hälfte des Sehne des doppelten Bogens.

6. Theorem: Bogen gleichen Sinus sind gleich.

7. Die Gleichheit zweier Sinus bedingt die Gleichheit ihrer Sinus versus. Die gröfseren Sinus geben die gröfseren Sinus versus.

Die Definition des Sinus wird in einem Avertissement auf Bogen $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ ausgedehnt. Denn das Complement (heute Supplement) eines solchen Bogens wird dann durch den Sinus gemessen. Der Bogen aber ist der gröfsere, welcher das kleinere Complement hat.

8. Theorem: Hat man ein System konzentrischer Kreise und zieht vom Centrum aus unbegrenzte Radien, so stehen die zwischen zweien liegenden Bogen aller Kreise, ein jeder zur ganzen Peripherie, der er angehört, im gleichen Verhältnis. Zwei derartige Bogen heifsen *„proportionellement égaux"* oder schlechthin *„égaux"*, während gleiche Bogen gleicher Gröfse *„tout-égaux"* genannt werden. Anschliefsend wird die Sexagesimalteilung des Kreises gelehrt.

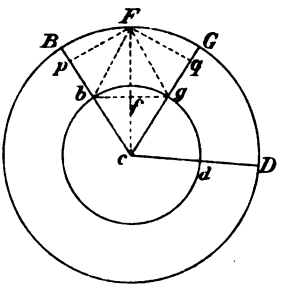


Fig. 3.

Beweis: Die aliquoten Teile von BD seien x genannt; zieht man nach den Teilpunkten Radien, so wird, behaupte ich, auch bd in *„aliquotes pareilles"* durch diese Radien geteilt. Es genügt, zwei x zu betrachten, BF und FG. Zieht man cF und cG, so mufs also $bf = fg$ sein. Denn fällt man von F ein Lot auf Bc und ebenso auf Gc, so sind die Lote Fp und

Fq Sinus gleicher Bogen, also gleich, und die Sinus versus Bp und Gq sind es ebenfalls, also auch $pb = qg$. Folglich auch $Fb = Fg$ als *„obliques"*, deren *„perpendiculaires"* und *„eloignemens du perpendicule"* gleich sind. Also giebt es auf Fc zwei Punkte F und c, die gleichen Abstand von den Endpunkten der Sehne bg besitzen, also ist Fc Mittelsenkrechte von Sehne bg und hälftet den Bogen $\overset{\frown}{bg}$, den die Sehne bg stützt. Dasselbe kann man natürlich jetzt für alle *aliquotes* von BD und bd beweisen, indem man ein nächstes x hinzunimmt; es also mit einem der beiden, für die der Beweis schon geführt wurde, kombiniert. Wenn also X das Maſs bedeutet, mit dem man die gröſsere Kreisperipherie miſst, und dieses mit oder ohne Rest so und so oft in der gröſseren Kreisperipherie aufgeht, so ergiebt sich, nachdem die Radien nach den Teilpunkten gezogen sind, ein x als *„aliquote pareille"* der kleineren Kreisperipherie, und nach der Definition der proportionalen Gröſsen ist

$$\frac{BD}{bd} = \frac{\text{gröſserer Kreisumfang}}{\text{kleineren Kreisumfang}}.$$

9. Theorem: Wenn die Kreise, deren Bogen proportional gleich sind, verschieden groſs sind, so stützt sich im gröſseren Kreis der Bogen auf die gröſsere Sehne.

Das zehnte und letzte Theorem lautet im ersten Abschnitt des VII. Buches:

Die Sehnen in demselben Kreise wachsen durchaus nicht proportional den Bogen, sondern die gröſsten Bogens (immer $< \pi$ gedacht) haben verhältnismäſsig kleinere Sehnen als die kleinsten Bogen.

Der Beweis ist sehr leicht. Halbiert man einen Bogen, so ist die Summe der Sehnen der halben Bogen gröſser als die Sehne des ganzen Bogens (nach dem Axiom Archimeds). Also ist die Hälfte der Sehne des ganzen Bogens kleiner als die Sehne des halben Bogens.

Auf den nun folgenden Zusatz glauben wir besonders aufmerksam machen zu müssen, weil er den Satz enthält, den man heute zu schreiben pflegt: Die Differenz eines unendlich kleinen Bogens und seiner Sehne ist unendlich klein dritter Ordnung (allgemein).

Sein Wortlaut ist bei Arnauld:

De là il s'ensuit que plus les arcs sont grands, plus la difference est grande entre la longeur de l'arc et celle de la corde, et qu'au contraire plus les arcs sont petits plus cette difference diminue. De sorte qu'on peut prendre un si petit arc que cette difference sera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée (kleiner als jede, noch so kleine, be-

liebig vorgegebene Strecke). *Ein für diese frühe Zeit äufserst schöner und präziser Ausdruck für den Grenzübergang!* [1])

Der zweite Abschnitt von Buch VII behandelt die Sekanten. Die Sekante eines Büschels k, die durch das Centrum c geht — Arnauld nennt sie immer kg —, ist die längste, wie mit Hilfe des Archimedischen Prinzips gezeigt wird, nachdem der betreffende Hilfsradius gezogen wurde. Die kürzeste ist kf, d. h. der äufsere Abschnitt jener längsten; dafs Arnauld diesen Abschnitt als besondere Sekante des Büschels rechnet, kommt daher, dafs er den Mittelpunkt des Büschels auch innerhalb des Kreises liegend zuläfst (*secantes interieures*).

3. Satz: Werden von k aus Sekanten nach Punkten hin gezogen, welche von f oder g gleich weit entfernt sind, so sind diese Sekanten gleich lang.

4. Satz: Ein Kreis mit dem Mittelpunkt k und dem Radius kf, sowie ein Kreis mit dem Radius kg und dem Mittelpunkt k berühren den ursprünglichen Kreis (Centrum c, Radius cg) in einem Punkte, ohne ihn zu schneiden.

7. Theorem: Ein Kreis (k, Radius kx, wobei $kf < kx < kg$) schneidet den Kreis (c, Radius cg), innerhalb dessen k liegt, in zwei von f und g gleich weit abstehenden Punkten X, x, der Bogen Xx des ursprünglichen Kreises, dessen Mitte g ist, liegt aufserhalb des Kreises (k, Radius kx).

Dieser Abschnitt schliefst mit dem Corollar: Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dafs man von einem Punkte k drei gleich lange innere Sekanten ziehen kann, ist, dafs k mit dem Centrum c des Kreises zusammenfällt.

Der dritte Abschnitt von VII beschäftigt sich mit den Tangenten.

Jede Senkrechte im Endpunkt eines Radius ist Kreistangente. Dieser Endpunkt ist Berührungspunkt (*point de l'attouchement*).

2. Satz: Zwischen der Peripherie und Tangente kann man keine Gerade durchlegen; dagegen eine unendliche Anzahl von Kreisen, welche nur den Berührungspunkt gemein haben. Heifsen die Punkte des Berührungsradius cf alle x, so ist jeder Kreis vom Centrum x und Radius xf zu jenen gehörig. An dieser Stelle ist für uns bemerkenswert die Bezeichnungsweise der Punkte einer Geraden durch denselben Buchstaben, welche sich auch bei Pascal findet.

Daran schliefsen sich die Aufgaben: In einem gegebenen Peripherie-

1) Eine ähnlich scharfe (noch frühere) Definition der Grenze findet sich nach der Bemerkung von I. Timschenko in der *Bibl. Mathem.* 1900 S. 511 bei Gregorius v. St. Vicentius (1647).

punkte die Tangente zu konstruieren und von einem Punkte aufserhalb Tangenten an den Kreis zu legen. Arnauld legt für die Lösung der letzteren einen zum gegebenen konzentrischen Kreis durch den gegebenen Punkt k, legt ferner im Durchschnittspunkt f von kc und dem gegebenen Kreis c die Tangente mn an den gegebenen. Dann trägt er den Bogen des Hilfskreises $\overset{\frown}{mn}$ über dieser Tangente mn von k aus nach beiden Seiten ab auf dem Hilfskreise und behauptet, kb und kd seien die verlangten Tangenten.

Er begründet sein Verfahren so: Da Bogen $\overset{\frown}{mn} = \overset{\frown}{bk} = \overset{\frown}{kd}$, so ist auch Sehne $mn = kd = kb$. Also sind die beiden Sehnen kb und kd um den Radius cf von c entfernt. Zugleich ist aber dieser Radius $\perp$ zu ihnen (d. h. seine Länge), da er sonst nicht ihren Abstand von c messen würde. Also sind kb und kd Tangenten des gegebenen Kreises. Sie berühren ihn in den Schnittpunkten mit den Radien cm und cn des Hilfskreises. Denn da k den Bogen mn hälftet, so hälftet auch m den Bogen kb und n den Bogen kd, also Radius $mc \perp$ zu kb und zwar mittelsenkrecht, wenn also h der Durchschnittspunkt von kb und mc ist, so mufs h auch der Fufspunkt des Radius ch des ursprünglichen Kreises sein, denn aus c läfst sich nur eine Senkrechte auf kb fällen.

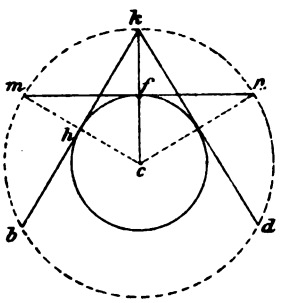


Fig. 4.

Aus dieser Konstruktion folgt, dafs man zwei und nur zwei Tangenten von k aus an den Kreis legen kann; zugleich sind die Abschnitte bis zum Berührungspunkt als Hälften gleicher Sehnen gleichlang.

Der letzte Abschnitt dieses Buches ist betitelt: *Des circonferences paralleles.*

Der Abstand eines Punktes von einem Kreise wird durch die kürzeste Linie gemessen, die von ihm aus nach dem Kreise gezogen werden kann. Ihre Verlängerung geht stets durch den Kreismittelpunkt.

Ferner ist eine Gerade senkrecht zu einem Kreise, wenn sie auf der Tangente des Schnittpunktes mit dem Kreise $\perp$ ist.

I. Theorem: Zwei konzentrische Kreise sind parallel. Sind zwei Kreise nicht konzentrisch, so ist nur die Gerade, welche beider Centren verbindet, senkrecht zu jedem der beiden Kreise.

Auf dieser Geraden liegt der gröfste und der kleinste Abstand der beiden Kreise.

Wenn zwei Punkte des einen Kreises gleich weit abstehen von einem Endpunkte seines Durchmessers, der durch das Centrum des andern geht,

so sind sie (jene Punkte) auch gleich weit entfernt von der Peripherie des letzteren Kreises.

Daraus ergeben sich drei bemerkenswerte Unterschiede des Parallelismus von Kreisen und Geraden.

1) Das negative Merkmal, bei Geraden sich niemals zu schneiden, ist für den Parallelismus von Kreisen nicht ausreichend.

2) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie eine gemeinsame Senkrechte besitzen, dagegen giebt es zwischen den beiden Kreisen zwei Strecken, welche zu beiden senkrecht sind, ohne den Parallelismus der Kreise herbeizuführen; dieser ist erst bedingt durch drei solcher senkrechten zwischenliegenden Strecken.

3) Während zwei sich nicht kreuzende Gerade parallel sind, wenn zwei Punkte der einen gleichen Abstand besitzen von der andern, bedarf es hierzu bei zwei Kreisen dreier solcher Punkte, während unendlich viele Punkte paarweise gleichen Abstand vom andern Kreise zeigen können.

Wir gehen zum VIII. Buche über: *Des Angles Rectilignes.*

Wir haben Arnaulds Definition des Winkels oder besser seines Winkelraumes schon in der Euklidkritik seiner Logik kennen gelernt. Der Winkel ist ihm wesentlich eine flächenhafte Gröfse (*tenant quelque chose de surface*). Die Winkelschenkel heifsen *„costez"*. Die Verbindungslinie derselben in zwei Punkten heifst *„la base"* oder *„la sontenante de l'angle"*. Heifst die Basis speziell *corde,* so versteht man darunter eine Basis, die gleiche Winkelschenkel abgrenzt. Ist die Basis $\perp$ auf dem einen Winkelschenkel, so ist sie Sinus des Winkels.

Der Bogen, der den Winkel mifst, führt die Bezeichnung *„l'arc que comprend l'angle"*. Der Fundamentalsatz über das Mafs des Winkels lautet: Alle Bogen zwischen den Schenkeln, deren Centrum mit dem Scheitel (*sommet*) zusammenfällt, bestimmen dieselbe Winkelgröfse (da sie proportional sind, d. h. zu den zugehörigen Peripherien sich gleich verhalten).

Der rechte Winkel wird stets durch die Hälfte des Halbkreises gemessen, also ist sein Complement ihm gleich.

Jede Senkrechte erzeugt zwei rechte Winkel, denn sie hälftet den Halbkreis, dessen Mittelpunkt ihr Fufspunkt ist.

Es folgt die Definition des spitzen und stumpfen Winkels. Dieselben werden durch die *„obliques"* gebildet, jetzt gleichsam an ihnen entdeckt.

Scheitelwinkel (*opposés au sommet*) sind einander gleich.

Da man hier die Länge krummer Linien nicht kennt, mufs man oft zu andern Winkelmafsen greifen, aber immer mit Bezug auf den Bogen, welcher das einzige natürliche Winkelmafs ist.

I. Die Sehne; ein durch sie begrenzter Winkel heifst *isoscele* (heute der der Basis gegenüberliegende im gleichschenkligen Dreieck).

Zwei von den Gleichheiten:

1) Gleichheit der Schenkel (*equilateres entr'eux*)

2) Gleichheit der Sehnen (*isocordes*)

3) Gleichheit der Winkel selbst

bedingen die dritte.

Ist nur 1) erfüllt, so liegt der gröfseren Sehne der gröfsere Winkel gegenüber u. s. w.

II. Der Sinus als Winkelmafs. Wir begegnen hier den Bezeichnungen *„Sinus eines Bogens"* und *„Antisinus"* (ist die Differenz zwischen Radius und Sinus versus), d. h. der heutige Cosinus im Einheitskreis.

Gleichheit des Winkelradius (d. h. der Hypotenuse) und des Sinus bedingen die des Antisinus; überhaupt zwei der Gleichheiten:

1) *L'égalité des rayons,*

2) *L'égalité des sinus,*

3) *L'égalité des angles mêmes*

bedingen die dritte.

Ein weiterer Abschnitt handelt von den Winkeln zwischen Parallelen.

Hier wird der Sinus mit dem Lot identifiziert zwischen den Parallelen.

Hier tritt zum ersten Male der Ausdruck Parallelraum auf (*espace parallele*) für zwei Parallelen und den zwischen ihnen liegenden Streifen der Ebene.

Der Satz von der Gleichheit der inneren Wechselwinkel lautet: *Toute oblique entre deux paralleles fait les angles alternes sur ces paralleles égaux;* denn die Winkel besitzen gleichen Radius (die Transversalstrecke) und gleichen Sinus.

Hier tritt als neunter Corollar der Satz von der Winkelsumme im Dreieck auf in der Form: — *Tout angle plus les deux angles que font ses costez sur la base sont égaux à deux droits;* denn zieht man durch die Spitze eine Parallele zur Basis, so hat man nach dem Satze von den innern Wechselwinkeln die drei Dreieckswinkel an dieser Parallelen nebeneinander. Die Summe dieser Winkel aber ist zwei Rechten gleich.

Der zehnte Corollar bringt anschliefsend den Satz vom Aufsenwinkel.

Elfter Corollar: Zwei Winkel sind gleich, wenn die Winkel an der Basis des einen bezw. denen an der Basis des andern gleich sind.

III. Als drittes Winkelmafs aufser dem Bogen erscheint die Basis ohne spezielle Bedingung. Ihre Anwendung ist noch enger begrenzt als die der Sehne und des Sinus. Sie vermittelt die Gleichheit zweier Winkel nur, wenn je ein Schenkel des einen je einem des andern Winkels gleich ist.

Interessant ist das Avertissement, welches den Schluſs von Buch VIII bildet. Die zuletzt aufgeführten Winkelmaſse zeigen wohl an, wenn zwei Winkel gleich sind, auch welches der gröſsere oder kleinere ist, aber das wahre Verhältnis der Gröſse der beiden Winkel stellt ihr Quotient nicht dar; dieses ergiebt nur das Bogenmaſs; darauf ist die Unlösbarkeit der Trisektion des Winkels zurückzuführen. Lassen wir Arnauld selbst sprechen: *Et c'est d'où vient la difficulté de la trisection de l'angle parce qu'il ne suffit pas pour cela de couper la corde en trois: ce qui seroit facile, mais il faut couper l'arc en trois; ce qui ne se peut par la géométrie ordinaire, c'est à dire en n'y employant que des lignes droites et circulaires.*

Das folgende IX. Buch führt den Titel: *Des Angles qui ont leur sommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laissent pas de les mesurer.*

In der Einleitung dazu sagt unser Autor: Wenn man bisher zwei Winkel vergleichen wollte, wobei der Scheitel des einen nicht mit dem Centrum des Maſskreises zusammenfiel, muſste man lange Schluſsreihen mit Hilfe von Dreiecken anwenden und deren Vergleichung, wodurch die Vorstellungskraft durch die Masse von in Betracht kommenden Strecken auſserordentlich ermüdet würde; ein Nachteil, den man für das Studium der Geometrie möglichst zu vermeiden suchen müsse.

Das IX. Buch nun solle lehren, wie man mit wunderbarer Leichtigkeit jeden Winkel durch den Bogen eines beliebigen Kreises messen könne, sei es, daſs sein Scheitel

1) auf der Peripherie,

2) innerhalb des Kreises, doch nicht im Centrum,

3) auſserhalb des Kreises liege, wenn seine Schenkel den Kreis schnitten oder berührten.

Voraus werden einige Erklärungen und Hilfssätze geschickt.

Der und der Bogen miſst unter diesen Bedingungen den Winkel, heiſst, er würde ihn messen, wenn der Winkel im Centrum des Maſskreises mit seinem Scheitel liegen würde.

III. Lemma: Wenn

$$A = a + b + c + d$$

ist, so ist

$$\frac{A}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2},$$

und wenn

$$A = b + c,$$

so ist

$$\frac{A}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{b}{2} - \frac{c}{2}.$$

Diese Beziehungen werden für die folgenden Theoreme von Arnauld mit sehr groſser Gewandtheit gehandhabt.

Im vierten Lemma werden die Sätze über die Winkelsumme im Dreieck und den Aufsenwinkel nochmals in Erinnerung gebracht.

Zunächst werden die Peripheriewinkel eingeteilt in vier Arten. Sie sind:

1) Der Sehnen-Tangentenwinkel,

2) ein Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel Sehne, dessen anderer Verlängerung einer Sehne über den Kreis hinaus ist,

3) der eigentliche, durch zwei Sehnen gebildete Peripheriewinkel,

4) ein Peripheriewinkel, dessen beide Schenkel Verlängerungen von Sehnen sind.

Arnauld will sie in drei sehr einfachen Sätzen erledigen, wovon die beiden letzteren eigentlich nur Corollare des ersten, alle aber so fruchtbar seien, dafs daraus viele wichtige Sätze, besonders auch über Proportionen von Strecken als einfache Corollare sich ergäben, welche die frühere Elementargeometrie nur auf höchst mühsamen Umwegen habe beweisen können.

Die Winkel zweiter Art habe überhaupt vor ihm noch niemand betrachtet.

Der Sehnen-Tangentenwinkel heifst *angle du segment, angulus segmenti.*

Der eigentliche Peripheriewinkel *angle dans le segment, angulus in segmento.*

Die beiden Abschnitte, die durch eine Sehne am Kreis erzeugt werden, *petit segment* und *grand segment.*

Ein in ein Segment eingeschriebener Winkel (*„angulus in segmento"* dieses Segments) stützt sich (*est appuyé*) auf den Bogen des gegenüberliegenden Segments.

I. Theorem. Der *angulus segmenti* wird gemessen durch die Hälfte des Bogens seines Segments (d. h. desjenigen, gegen welches hin der Tangentenschenkel gerichtet ist).

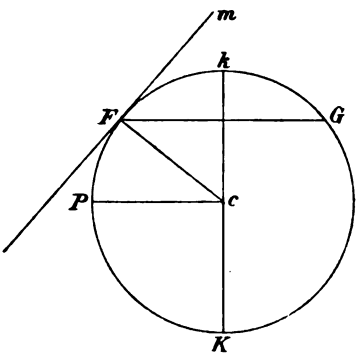


Fig. 5.

Beweis. Der *angulus segmenti* sei mFG und $kK \perp FG$; ferner $Pc \perp kK$ und deshalb $Pc \nparallel FG$. Der Durchmesser kK hälftet die Bogen der beiden Segmente FG und GF; Winkel Fck wird gemessen durch Bogen $\overset{\frown}{kF}$, Winkel FcK durch Bogen $\overset{\frown}{FK}$.

Wenn also $\sphericalangle mFG = \sphericalangle Fck$, so ist der Satz richtig.

Zunächst ist $\sphericalangle PcF = \sphericalangle cFG$ als innere Wechselwinkel (*alternes*) zwischen Parallelen. Ferner Winkel $mFc = \mathrm{R}$; ebenso $\sphericalangle kcP$. Zieht man auf beiden Seiten die gleichen inneren Wechselwinkel ab, so folgt

$$\sphericalangle mFG = \sphericalangle Fck;$$ q. e. d.

Ebenso führt man den Beweis für den *angulus segmenti* des gegenüberliegenden Segments, nur addiert man dort die inneren Wechselwinkel.

1. Corollar: Der *angulus semicirculi* ist ein Rechter.

2. Corollar: Wenn zwei Kreise, die ineinanderliegen, sich berühren, so stützt jede Sehne, die vom Berührungspunkt nach der Peripherie des gröfseren Kreises hingezogen wird, in beiden Kreisen proportional gleiche Bogen; denn diese messen beide denselben Winkel.

II. Theorem. Die Winkel zweiter Art werden gemessen durch die Summe der Hälften der Bogen, welche der eine Schenkel und die Sehnenverlängerung des andern Schenkels stützen.

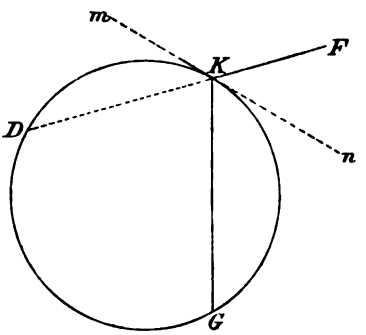


Fig. 6.

Beweis. Man zieht in K die Kreistangente mn. Dann zerfällt der betrachtete Winkel FKG in die beiden Winkel FKn und nKG. Setzt man an Stelle von FKn seinen Scheitelwinkel mKD, so hat man den gegebenen Winkel FKG in zwei *anguli segmenti* zerlegt. Diese werden gemessen: $\sphericalangle mKD$ durch $\frac{1}{2}\overset{\frown}{KD}$ und $\sphericalangle nKG$ durch $\frac{1}{2}\overset{\frown}{GK}$, also der gegebene $\sphericalangle FKG$ durch $\frac{1}{2}[\overset{\frown}{GK} + \overset{\frown}{KD}]$; q. e. d.

Als Corollar folgt der Satz von der Gleichheit von Peripheriewinkeln über demselben Bogen. Er wird mit Hilfe des vorhergehenden Hauptsatzes für ihre Nebenwinkel bewiesen.

III. Theorem: *Tout angle dans un segment a pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé* (der Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels).

Beweis. Man zieht wieder die Tangente im Scheitel. Die Winkel über derselben sind in Summa $= 2\,\mathrm{R}$; die beiden *anguli segmenti* rechts und links werden durch die Summe der Hälften der Bogen über den Schenkeln des *angulus in segmento* gemessen. Das Mafs aller drei Winkel ist der Halbkreis, also bleibt für den dritten Winkel nach Lemma III die Hälfte des noch übrigen Bogens d. h. desjenigen, über dem er steht.

Durch Verlängerung des einen Schenkels des *angulus in segmento* könnte man den Beweis auch nach dem zweiten Hauptsatze führen.

Der dritte Hauptsatz wird in siebzehn Corollaren näher ausgeführt; wir heben folgende hervor:

5. Corollar: Berühren sich zwei Kreise innerhalb, und zieht man vom Berührungspunkt aus im gröfseren zwei Sehnen, so sind die zwischen beiden liegenden Bogen beider Kreise proportional gleich; denn ihre Hälften messen denselben Winkel. Dasselbe findet statt, wenn das Centrum des

zweiten Kreises auf der Peripherie des ersten liegt, doch gilt die Beziehung dann zwischen dem Bogen des zweiten und der Hälfte des Bogens des ersteren.

8. Corollar: Alle *anguli in segmento* eines Segments sind gleich dem *angulus segmenti* des gegenüberliegenden.

9. Corollar: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

10. Corollar: Die Summe je zweier *anguli in segmento* gegenüberliegender Segmente sind gleich 2 R.

13. Corollar: Die Hälfte der Basis eines *angulus in segmento* ist sein Sinus, wenn er spitz, der seines Complements (bei Arnauld!), wenn er stumpf ist.

14. Corollar: Man sagt, ein Segment faſst einen Winkel (*est capable d'un tel angle*), wenn alle *anguli in segmento* dieses Segments jenem Winkel gleich sind.

15. Corollar: Der Halbkreis faſst den rechten Winkel.

16. Corollar: Wenn man von der Spitze eines Winkels eine Gerade nach der Mitte der Basis zieht, und diese Verbindungsstrecke gleich der Hälfte der Basis ist, so ist der Winkel ein rechter.

17. Corollar: Wenn zwei gleiche Sehnen sich schneiden, so ist je ein Abschnitt der einen je einem Abschnitt der andern gleich.

Es folgen fünf Aufgaben, eine weitere Tangentenkonstruktion für den Kreis; die Aufgabe, ein Segment an gegebenem Kreise abzuschneiden, welches einen gegebenen Winkel faſst. Sie wird mit Hilfe einer beliebigen Tangente und der Sehne im Berührungspunkt, welche mit der Tangente den gegebenen Winkel bildet, auf Grund des 8. Corollars gelöst. Die fünfte Aufgabe heiſst: Man kennt die Abstände dreier Punkte a, b, c und von einem vierten weiſs man, nach welcher Seite er liegt; man kennt ferner die Winkel cxa und axb; der Punkt x ist zu konstruieren.

Lösung: Man konstruiere über ac den Bogen, welcher den Winkel cxa, über ab denjenigen Bogen, welcher axb faſst; der Schnittpunkt dieser Bogen ist der gesuchte Punkt.

Der zweite Abschnitt von IX behandelt die Winkel, deren Scheitel im Kreise liegt, ohne mit dem Centrum identisch zu sein.

Man verlängere die Schenkel, sodaſs man es mit zwei sich schneidenden Sehnen zu thun hat.

IV. Theorem: Ein Winkel, der durch den Durchschnitt zweier Sehnen gebildet ist, wird gemessen durch die Summe des halben Bogens, über dem er steht, und des halben gegenüberliegenden Bogens.

Beweis. Betrachten wir $\sphericalangle fKg$.

$$\sphericalangle fKg = \sphericalangle cfd + \sphericalangle fdg.$$

Diese sind aber *anguli in segmento* und werden gemessen: $\sphericalangle cfd$ durch $\frac{1}{2}\widehat{cd}$, $\sphericalangle fdg$ durch $\frac{1}{2}\widehat{fg}$, also $\sphericalangle fKg$ durch $\frac{1}{2}[\widehat{cd}+\widehat{fg}]$.

Der dritte Abschnitt dieses Buches handelt von den Winkeln, deren Scheitel aufserhalb des Mafskreises liegt.

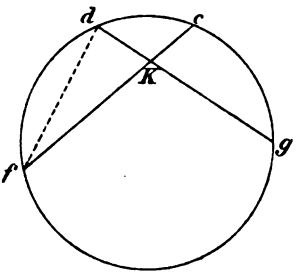


Fig. 7.

Die Schenkel eines solchen Winkels können

1) entweder beide den Kreis schneiden,

2) oder beide den Kreis berühren,

3) oder der eine ihn schneiden, der andre ihn berühren.

Der erste und zweite Fall wird durch das Theorem V zusammengefafst. Es lautet: Der Winkel unter 1) und 2) wird durch die Differenz der Hälften der (inbezug auf den Scheitel) konkaven und konvexen zwischen den Winkelschenkeln liegenden Bogen des Bezugskreises gemessen.

Beweis von 1). Der betrachtete Winkel sei fKg. Zieht man die Hilfssehne fd, so ist nach dem Aufsenwinkelsatz $\sphericalangle fKg = \sphericalangle fdg - \sphericalangle Kfd$, diese beiden Winkel sind aber *anguli in segmento*; also ist Winkel fKg zu messen durch Bogen $\frac{1}{2}[\widehat{fg} - \widehat{dc}]$.

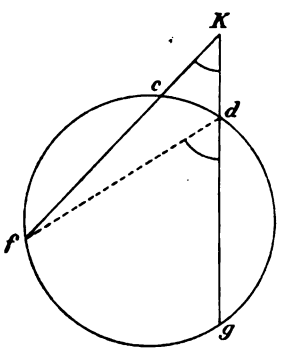


Fig. 8.

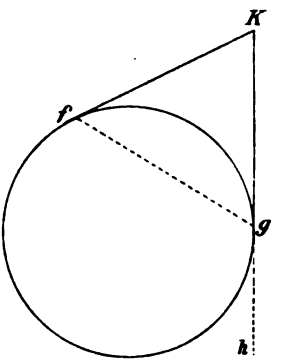


Fig. 9.

Beweis von 2). Der Winkel, dessen Schenkel Tangenten sind, sei wieder durch fKg bezeichnet; man verlängere Kg über g hinaus; dann ist $\sphericalangle fKg = \sphericalangle hgf - \sphericalangle gfK$, dann ist der gegebene Winkel in die Differenz zweier *anguli segmenti* zerlegt und wird entsprechend $\sphericalangle fKg$ durch $\frac{1}{2}[\widehat{fg} - \widehat{gf}]$ gemessen.

Nicht ohne Interesse ist das folgende VI. Theorem. Ein Winkel habe seinen Scheitel aufserhalb des Bezugskreises; wenn der eine Schenkel den Kreis schneidet und in dem Endpunkt eines Durchmessers ihn wieder verläfst, auf welchem der andere Schenkel senkrecht ist, welch letzterer den

Kreis schneiden, berühren oder ganz aufserhalb liegen kann, so wird der Winkel gemessen durch die Hälfte des Bogens, welchen der Abschnitt des ersteren Winkelschenkels stützt und zwar des kleineren Bogens. Der Satz wird auf vier Arten bewiesen, um zu zeigen, wie verschieden man die bisher abgeleiteten Resultate benützen kann.

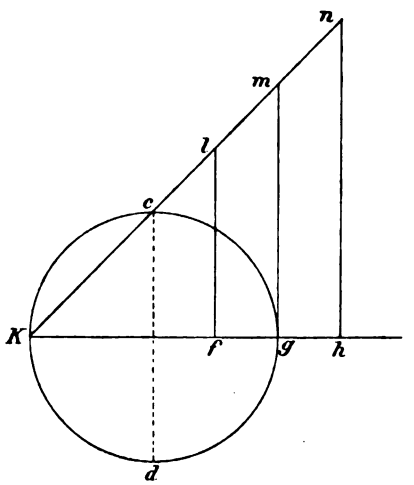


Fig. 10.

Wir geben den dritten Beweis wieder. Der betrachtete Winkel sei Winkel $\sphericalangle l$, oder die ihm gleichen Winkel $\sphericalangle m$ oder $\sphericalangle n$. Man ziehe die Hilfslinie $cd \perp Kg$, dadurch entstehen die beiden gleichen Bogen cK und Kd. Der Winkel bei c ist aber gleich den Winkeln bei l, m oder n als Scheitelwinkel ihrer *alternes* (innere Wechselwinkel zwischen Parallelen), der Winkel Kcd wird aber als *angulus in segmento* gemessen durch $\frac{1}{2}\overset{\frown}{Kd}$; also die ihm gleichen $\sphericalangle Klf$, $\sphericalangle Kmg$ und $\sphericalangle Knh$ durch die Hälfte von Bogen cK.

Die Winkel, deren Schenkel Tangenten sind, werden nochmals wieder aufgenommen. Sie werden *angles circonscripts* genannt.

Das VII. Theorem faſst ihr Maſs in andere Worte: Es ist dasselbe gleich dem halben Maſskreis minus dem konvexen Bogen zwischen den Winkelschenkeln.

Daran schlieſsen sich sechs Corollare.

Der sechste heiſst beispielsweise: Die demselben Kreise umschriebenen Winkel sind gleich, wenn ihre Scheitel gleichweit vom Centrum entfernt sind.

Den Schluſs des Buches IX bildet eine hübsche Tabelle der betrachteten Winkel und ihrer Maſse durch die Bogen des Bezugskreises je nach ihrer Lage zu demselben. Da wir die einzelnen Theoreme wiedergegeben haben, glauben wir von der Reproduktion der Tabelle absehen zu dürfen.

Im X. Buche ist die Rede von den Proportionen von Strecken. Da dieselbe von den Parallelen und Winkeln abhängt, kann sie erst hier in ungezwungener Weise erörtert werden.

Voran gehen zehn Hilfssätze. Die Definition des ebenen Parallelraumes, des *„Lots dieses Raumes“* werden in Erinnerung gebracht. Winkel sollen ähnlich heiſsen, wenn sie gleich sind und je einer der Winkel an der Basis des einen je einem an der Basis des anderen gleich ist.

Zwei Strecken sind *„proportionelles“* zweier andern, wenn sie die Ante-

cedenten bilden und letztere die Consequenten der Proportion. Wir kürzen Parallelraum im Folgenden immer durch PR ab.

Wenn zwei Strecken in zwei PR gleichgeneigt sind, verhalten sie sich wie die Lote dieser PR und die *éloignemens du perpendicule* stehen im gleichen Verhältnis.

Den Beweis führt Arnauld wieder mit Hilfe der *aliquotes pareilles*, indem er das Lot des einen Raumes in beliebig viele gleiche x teilt und durch Parallelen zu den Grenzen des PR durch die Teilpunkte beliebig viele sehr kleine PR erhält, die unter sich gleich sind. Dadurch zerfällt die Transversalstrecke in ebensoviele kleine gleiche Teile. Denn geht er mit dem x an die Teilung des Lots des zweiten PR; nach der Definition für Proportionen finden dann die behaupteten drei Verhältnisgleichheiten statt. Arnauld ist sehr stolz auf seinen Beweis: *„dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé."* Aus diesem Fundamentalsatz werden die Proportionen an Transversalstrecken und ihren Abschnitten zwischen Parallelen hergeleitet.

Das II. Theorem enthält die Proportionen bei ähnlichen Winkeln (Dreiecken).

Wir finden z. B. als dritten Corollar den Satz: Bei ähnlichen Winkeln (Dreiecken) verhalten sich die Basen wie die zugehörigen Höhen.

Statt von ähnlichen Dreiecken spricht Arnauld konsequent immer von Winkeln mit parallelen Basen.

Das III. Theorem dieses Buches lautet: Die Schenkel zweier ungleicher Winkel sind gleichwohl proportioniert, wenn je ein Winkel an der Basis gleich, im andern Paar der Winkel an den Basen einer das Complement des ihm entsprechenden ist.

Der Beweis wird mit Hilfe eines anliegenden gleichschenkligen Dreiecks geführt. Als zweiten Corollar des dritten Satzes haben wir die Behauptung, dafs die Halbierungslinie eines Winkels die Basis in zwei Abschnitte teilt, die sich verhalten wie die ihnen anliegenden Schenkel.

Den Schlufs des X. Buches bilden die Aufgaben: Zu drei Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren und eine gegebene Strecke in gleiche Teile zu teilen.

Das XI. Buch ist überschrieben: *Des lignes reciproques;* es birgt einige interessante Sätze. Arnauld selbst sagt: *Ce livre cy sera encore de la proportion des lignes et contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peutestre plus belles et plus générales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matière des proportions, en ne se servant que des lignes droites et des cercles.*

Zwei Strecken sind reziprok zu zwei andern, wenn sie die äufseren Glieder einer Proportion bilden und das zweite Paar die inneren.

Den eigentlichen Lehrsätzen geht die Definition antiparalleler Basen desselben Winkels vorher. Arnauld unterscheidet drei Anordnungen: 1) Getrennt zwischen den Winkelschenkeln verlaufende, 2) sich kreuzende, 3) antiparallele Basen, welche einen gemeinschaftlichen Endpunkt besitzen.

Zum Ausgangspunkt aller Beweise dieses Buches dient der Fundamentalsatz von X. Um sich nicht zu verwirren, hat man als ersten und dritten Term immer die im gleichen PR liegenden Transversalstrecken anzusetzen und als ersten und zweiten die gleichgeneigten in verschiedenen PR.

I. Hauptsatz. In einem Winkel mit zwei parallelen Basen ist ein ganzer Schenkel und sein durch die zweite Basis gebildeter Abschnitt (gegen den Scheitel) reziprok zum andern Schenkel und dessen entsprechendem Abschnitt.

Wir geben von den Beweisen den der zweiten Anordnung.

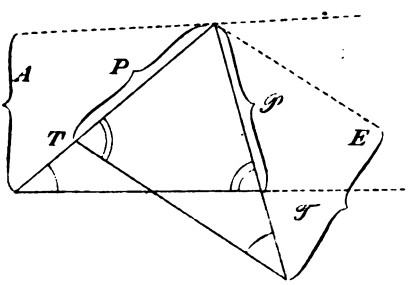


Fig. 11.

Beweis: T und $\mathscr{T}$ liegen im gleichen PR, der A heifsen möge; P und $\mathscr{T}$ im gleichen Parallelraum E, also, da T und $\mathscr{T}$ in ihren Parallelräumen gleichgeneigt sind und P und $\mathscr{P}$ ebenso in den Räumen A und E,

$$T : \mathscr{T} = \mathscr{P} : P.$$

II. Hauptsatz: Wenn zwei Scheitelwinkel antiparallele Basen besitzen, so sind die Abschnitte des einen Schenkels, die durch den andern gebildet werden, reziprok zu den Abschnitten des andern Schenkels.

Im folgenden wird der Plan des ganzen XI. Buches entwickelt. Es soll sich um die Aufstellung von Paaren reziproker Strecken handeln.

Dazu sind immer antiparallele Winkelbasen notwendig. Kennt man also einen allgemeinen Weg zur Herstellung solcher, so bereitet die Sache keine Schwierigkeiten. Dazu verwendet Arnauld einen Kreis, ohne welchen man ja auch die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Strecken nicht auffinden kann.

Dabei sind die Möglichkeiten, dafs der Scheitel des Winkels, welcher antiparallele Basen besitzt,

1) auf dem Kreise,
2) aufserhalb,
3) innerhalb desselben

liegt.

Notwendig sind dazu die Sätze über die *anguli segmenti, in segmento* u. s. w. des IX. Buches; dieselben werden deshalb als Lemmen nochmals hierhergestellt.

Arnauld will sich im folgenden nicht damit begnügen, dafs, wenn je ein Winkel an antiparallelen Basen gleich ist, auch nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck der andere übereinstimmen mufs, sondern er will für jeden den Nachweis positiv erbringen. Ebenso immer ohne Mittelglied direkt nachweisen, dafs zwei Paare (*binaires*) von Strecken zu einander reziprok sind, um daran speziell den Vorzug des direkten Beweises zu erkennen.

Hier schliefst sich in der Ausgabe von 1667 ein Satz an, dem Arnauld den Namen *„Theoreme anomal"* giebt.

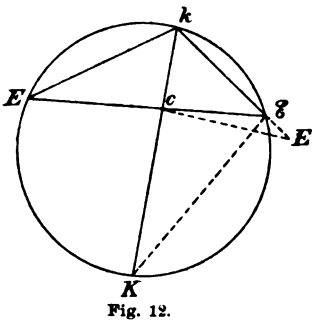


Fig. 12.

„Die Schenkel eines eingeschriebenen Winkels sind reziprok zu der Sehne auf der Halbierungslinie dieses Winkels und deren Abschnitt zwischen Scheitel und Basis des eingeschriebenen Winkels."

Beweis: $\sphericalangle KkE$ ist nicht nur gleich, sondern auch ähnlich dem $\sphericalangle Kk\mathscr{E}$; denn $\sphericalangle kE\mathscr{E}$; $= \sphericalangle kK\mathscr{E}$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen und $\sphericalangle kcE$ wird gemessen (nach Buch IX) durch $\frac{1}{2}(kE + K\mathscr{E})$ und $\sphericalangle K\mathscr{E}k$ durch $\frac{1}{2}kK$; da aber $\overset{\frown}{kK} = \overset{\frown}{kE} + \overset{\frown}{EK}$ und $\overset{\frown}{EK} = \overset{\frown}{K\mathscr{E}}$ ist, so wird

$$\tfrac{1}{2}kK = \tfrac{1}{2}[kE + K\mathscr{E}],$$

also auch

$$\sphericalangle Eck = \sphericalangle K\mathscr{E}k,$$

also nach dem ersten Satze

$$kE : kK = kc : k\mathscr{E}.$$

[Um die antiparallelen Basen vor sich zu haben, hätte man nur um die Winkelhalbierende umzuklappen.]

Der allgemeine Fall, dafs der Scheitel auf der Peripherie liegt, erfordert die Hinzunahme einer geraden Linie. Dadurch ergiebt sich ein *allgemeiner Satz, welcher vielleicht der schönste und umfassendste über Proportionen von Strecken sei:*

„Zieht man vom Endpunkt eines Durchmessers, welcher senkrecht ist zu einer Geraden y, welche ihrerseits den Kreis schneidet, berührt oder aufserhalb liegt, Gerade nach der Geraden y hin, so sind alle diese Geraden, d. h. die Strecken, welche von der Kreisperipherie oder von y begrenzt werden, und ihre Abschnitte gegen den Endpunkt des Durchmessers hin, welche durch y bezw. die Kreisperipherie gebildet werden, reziprok zu jeder von ihnen und

und deren entsprechenden Abschnitt, und mittlere Proportionale zwischen einer solchen Strecke und jenem Abschnitt ist die Strecke des Büschels nach dem Schnittpunkte hin der Geraden y und des Kreises."

Arnauld unterscheidet jene drei Fälle:

1) *y* ist Sekante,
2) *y* ist Tangente,
3) *y* verläuft ganz aufserhalb.

In 1) unterscheidet er wieder drei Unterfälle:

a) zwei Strecken werden verglichen, die beide zuerst von *y* getroffen werden.

b) zwei solche, die zuerst den Kreis schneiden;

c) die Kombination von zwei Strecken der beiden Arten,

sodafs man für 1) die Figuren hat:

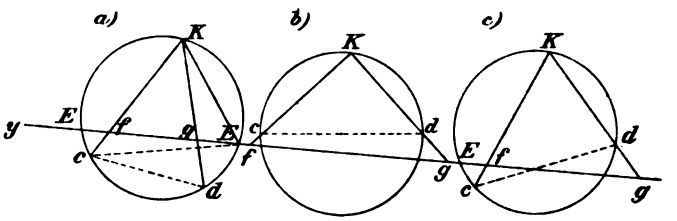


Fig. 13.

Es wird nun nachgewiesen, dafs immer die Basen cd und fg antiparallel sind; und infolgedessen:

$$Kf : Kd = Kg : Kc.$$

Im Satze $Kf : KE = KE : Kc$ sind wieder Ef und Ec antiparallele Basen. (Fig. a.)

Für 2) und 3) ergeben sich nachfolgende Figuren.

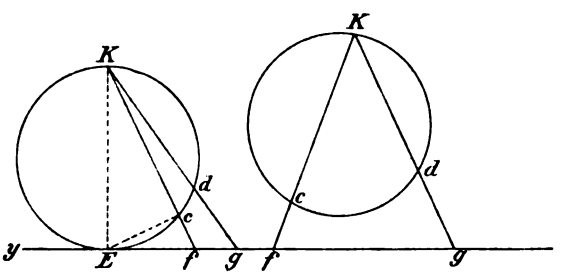


Fig. 14.

In der ersteren ist der Durchmesser KE selbst mittlere Proportionale zwischen Kc und Kf oder Kd und Kg. Die Basen Ef und Ec, sowie cd und fg sind wieder antiparallel.

An diesem Satze hat wohl Arnauld Eigentumsrecht.

Wir gehen zum zweiten Falle über: Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden liegt aufserhalb des Kreises.

Das V. Theorem enthält den Sekantensatz.

Beweis: cg und df sind antiparallel, denn $\sphericalangle f = \sphericalangle g$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. $\sphericalangle kcg$ aber ist gleich kdf; denn beide werden gemessen durch $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{gd} + \overset{\frown}{dc} + \overset{\frown}{cf})$ nach Buch IX, also sind cg und df antiparallel und $kf : kg = kd : kc$.

Auf gleiche Weise, mit Hilfe des Antiparallelseins der cE und fE, wird im VI. Theorem der Tangentensatz bewiesen.

Beweis: $\sphericalangle KfE$ wird gemessen durch $\frac{1}{2}\overset{\frown}{Ec}$; dieser Bogen bildet aber auch das Mafs des *angulus segmenti* KEc; und $\sphericalangle KEf$ besitzt als

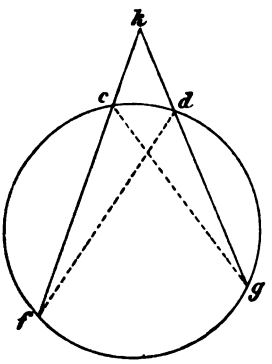


Fig. 15.

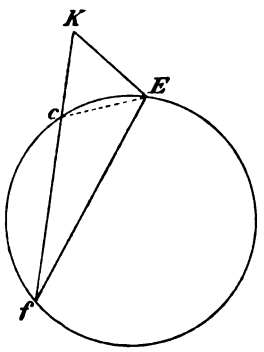


Fig. 16.

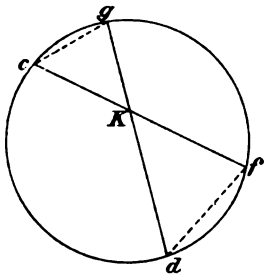


Fig. 17.

Mafs $\frac{1}{2}[\overset{\frown}{Ec} + \overset{\frown}{cf}]$; ein Bogen, der auch Mafs des Winkels KcE ist, also fE und Ec antiparallel und $Kf : KE = KE : Kc$.

Das VII. Theorem lehrt und beweist den Sehnensatz. cg und df sind antiparallel, also $Kf : Kg = Kd : Kc$. Wir haben hier den dritten Fall, wo der Schnittpunkt innerhalb des Kreises liegt.

VIII. Theorem. Wird eine der Sehnen halbiert, so ist ihre Hälfte mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der andern.

Das IX. Theorem bringt die drei Sätze über die mittleren Proportionalen am rechtwinkligen Dreieck.

Das X. Theorem lautet: Wird die Hypotenuse eines rechten Winkels durch eine Senkrechte geschnitten, welche auch einen Schenkel schneidet, so ist die ganze Hypotenuse und ihr Abschnitt gegen jenen Schenkel hin reziprok zu diesem Schenkel und seinem Abschnitt gegen die Hypotenuse.

Das letzte Theorem dieser Art ist die Umkehrung der bisherigen und lautet: Hat ein Winkel zwei Basen und stehen die Schenkel bezüglich dieser Basen in Proportion, so sind die Basen parallel oder antiparallel. Es folgen Aufgaben über die vorhergehenden Theoreme, z. B. wenn man die drei ersten Strecken einer geometrischen Progression kennt, die übrigen

bis ins Unendliche zu konstruieren. Die gegebenen drei Glieder seien Kc, KL, Kd. Man errichtet über Kd einen Halbkreis, trage Kc von K aus auf Kd ab, errichte in c eine Senkrechte; verbinde KL durch eine unendliche Gerade x; die Verlängerung von Kd sei z; dann errichte man abwechselnd in d auf z, in m auf x, in f wieder auf z u. s. w. eine Senkrechte. Km, Kf, Kn, Kg in inf. sind die weiteren Glieder der Progression.

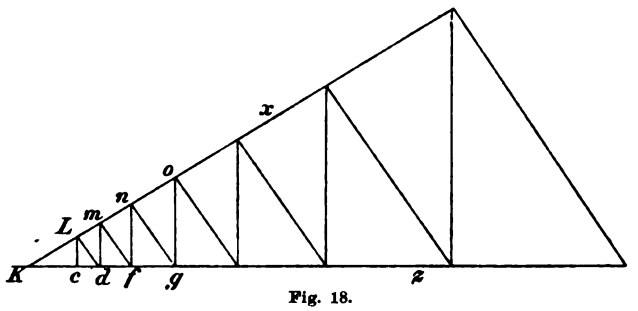


Fig. 18.

V. Aufgabe. Eine gegebene Strecke nach dem goldenen Schnitt (*en moyenne et extrême raison*) zu teilen.

$$b - x : x = x : b,$$

das x heifst *mediane*.

Man beschreibe mit $\frac{b}{2}$ als Radius einen Kreis; nachdem man im Endpunkt eines Durchmessers eine Senkrechte gleich b errichtet hat, ziehe man durch den andern Endpunkt von b eine Durchmessersekante. Ihr Abschnitt aufserhalb sei x.

Die ganze Sekante ist $x + b$, b ist Tangente, also:

$$x : b = b : x + b$$
$$b : x = x + b : b \quad (\textit{permutando})$$
$$b - x : x = x : b \quad (\textit{dividendo}).$$

Wenn man einer so geteilten Strecke ihre Mediane anfügt, erhält man wieder eine im äufsern und innern Verhältnis geteilte, deren Mediane die ursprüngliche Strecke ist

$$b - x : x = x : b$$
$$b : x = x + b : b \quad (\textit{componendo}),$$

also ist $b + x$ durch b nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Auch teilt der kleinere Abschnitt, die Mediane (den gröfseren) einer so geteilten Strecke, wieder *„en moyenne et extrême raison“*; der kleinere Abschnitt möge y heifsen, die Mediane x, die ganze Strecke b. Zu beweisen ist:

$$x - y : y = y : x.$$

Man hatte aber

$$y : x = x : \underbrace{y + x}_{b}$$

permutando $\quad x : y = y + x : x$

dividendo $\quad x - y : y = y : x.$

Hat man also eine so geteilte Strecke, so kann man daraus eine ∞ Menge gröfserer und kleinerer ebenso geteilter ableiten.

Das sei ein neuer und sehr schöner Beweis für die Teilbarkeit einer Strecke ins Unendliche.

Hier hat Arnauld in schöner Weise die fünf Jahre vorher durch Pascal entdeckte Methode der vollständigen Induktion gehandhabt.[1])

Die sechste Aufgabe heifst: Wenn man die Länge der Schenkel eines Winkels kennt, welcher die Hälfte eines jeden Winkels an der Basis sein soll, die Basis zu konstruieren.

Lösung: Man beschreibe mit der gegebenen Schenkellänge als Radius einen Kreis und teile den Radius nach dem goldenen Schnitt. Die Kreissehne, welche gleich dem gröfseren Abschnitt des Radius genommen wurde, ergiebt die verlangte Basis. Also die Konstruktion der Zehneckseite.

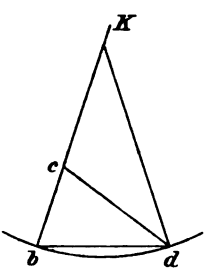


Fig. 19.

Beweis: Es sei c der Teilpunkt des Radius; man verbinde c und d; man hat nun nachzuweisen, 1) dafs $\sphericalangle K = \sphericalangle cdb$; 2) dafs $\sphericalangle cdb = \frac{1}{2} \sphericalangle bdK$ ist.

Ex construct. ist $bc : bd = bd : bK$, also sind die beiden Basen cd und Kd des $\sphericalangle b$ antiparallel und folglich $\sphericalangle K = \sphericalangle bdc$.

2) Die Abschnitte bc und cK der Basis bK des Winkels bdK verhalten sich wie die Schenkel dieses Winkels, da $Kd = Kb$ und $bd = cK$ ist; also ist Winkel bdK halbiert durch cd.

Den Schlufs des XI. Buches bilden einige Beispiele inkommensurabler Strecken.

1) Seite und Hypotenuse im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck.

2) Wenn die Hypotenuse und eine Kathete sich wie $x : z$ (ganze Zahlen) verhalten, soll man beurteilen, wann das Verhältnis der Hypotenuse und der andern Kathete rational ist. Die Bezeichnungen entnehmen wir aus der Figur

---

1) Nach brieflicher Mitteilung von Prof. G. Vacca in Turin an Herrn Geh. Hofrat Cantor besafs Maurolycus schon 1575 die vollständige Induktion als Methode und erkannte voll deren Wert.

$$\therefore h \,.\, c \,.\, k \quad \text{und} \quad \therefore h \,.\, d \,.\, l,$$

$$\frac{h}{c} = \frac{x}{z},$$

also

$$\frac{h}{k} = \frac{x^2}{z^2};$$

ferner

$$l = h - k; \quad \frac{l}{h} = \frac{h-k}{h} = 1 - \frac{k}{h},$$

also

$$\frac{l}{h} = \frac{x^2 - z^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad h : l = x^2 : (x^2 - z^2),$$

ist also $x^2 - z^2$ Quadratzahl, dann verhalten sich h und l wie zwei Quadratzahlen zu einander und dann ist h und d kommensurabel.

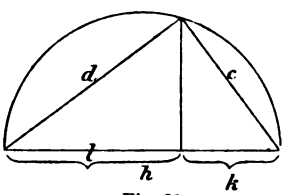


Fig. 20.

3) Wenn eine Kathete aliquoter Teil der Hypotenuse ist, so sind Hypotenuse und zweite Kathete inkommensurabel.

Den Gegenstand des XII. Buches bilden die Figuren im allgemeinen hinsichtlich ihrer Winkel und Seiten. Wir haben Arnaulds Begriff der Figur schon oben kennen gelernt, die Seiten sind ihm Begrenzung.

Inbezug auf dieselben hat man einzuteilen in

1) *rectilignes*

2) *curvilignes* (krummlinige)

3) *mixtes* (gemischtlinige).

Arnauld macht hier auf eine Art Dualität aufmerksam: ein Winkel erfordert zwei Gerade; an einer Seite der Figur liegen zwei Winkel.

Die geradlinigen Figuren unterscheidet er in solche *„qui ont quelque angle rentrant"*, das sind Vielecke mit einspringendem Winkel, und andere *„dont tous les angles sont saillants"*.

I. Theorem: Jedes n-Eck kann in $n - 2$ Dreiecke aufgelöst werden.

II. Theorem: Die Summe der Winkel im n-Eck ist $(2n - 4)$ Rechten gleich.

Die Figuren werden eingeteilt in *„equiangles"* und *„equilateres"*. Die mit beiden besonderen Eigenschaften heifsen *„regulieres"*; dazu gehört der Kreis.

Kongruente Figuren heifsen *„tout-egales"*. Dieselben sind ein spezieller Fall der *„semblables"*. Für letztere gilt der Satz: Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie homologe Seiten derselben.

Sind die Perimeter zweier Figuren gleich, so heifsen sie *„isoperimetres"*.

Im folgenden werden besonders ein- und umgeschriebene Polygone untersucht. Dafür gilt zunächst der Satz: *Une figure inscritte au cercle*

ne sçauroit être equiangle qu'elle ne soit equilaterale ou absolument ou alternativement; et en ce dernier cas, il faut que le nombre des costez soit pair.

Bemerkenswert ist im Beweise die Wendung: *Car afin que . . . il faut et il suffit* (ist notwendig und hinreichend). Für die umgeschriebenen Figuren gilt der Satz: Eine umgeschriebene Figur kann nur gleichseitig sein, wenn sie zugleich gleichwinklig ist, sei es absolut oder alternativ.

Als vierten Satz finden wir: Jedes reguläre Polygon kann einem Kreise ein- oder umgeschrieben werden. Zum Beweise wird durch drei Ecken der Figur ein Kreis gelegt und nachgewiesen, dafs successive die Verbindungsstrecke jeder folgenden Ecke mit dem Centrum dieses Kreises dem Radius desselben gleich sein mufs.

Es wird sodann gelehrt, wie man den Polygonwinkel einer regulären eingeschriebenen Figur bestimmt.

Die Geometer betrachten den Kreis als reguläres Polygon unendlich grofser Seitenzahl. Der Bogen über einer Seite ist demnach unendlich klein, *infiniment petit.* Der Polygonwinkel ist demnach 180^0.

Bemerkenswert für die Frage des Contingenzwinkels ist hier die Stelle: *Aussy il est vray que l'angle du raion sur la circonference d'un cercle est droit en sa maniere, puisque le raion coupe perpendiculairement sa circonference; et que si cet angle est plus petit qu'un droit ce n'est que l'espace qui est entre la tangente et la circonference qui est plus petit que tout angle aigu quoiqu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse estre divisé en une infinité de plus petits.*

Der nächste Satz heifst: In zwei regulären n-Ecken stehen die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise, die Perimeter und Seiten (also *raion, raion droit, circuit* und *costé*) im gleichen Verhältnis. Als zweiter Corollar: Kreisumfänge verhalten sich wie die betreffenden Durchmesser.

Hübsch sind hier wieder die Grenzbetrachtungen: *Car plus ces polygones ont de costez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle et leur circuit. Et ainsy quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la centmilliéme partie de l'épaisseur d'une feuille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de costez inscrit dans l'un et dans l'autre cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces cercles sera moindre que cette ligne donnée.*

Or de quelque grand nombre de costez que soient ces polygones, leurs circuits sont toûjours en même raison que les diametres.

Donc on doit conclure par une analogie très certaine, que les circonferences sont aussy en même raison que les diametres.

Für die Konstruktion der regulären n-Ecke giebt Arnauld die Regeln:

1) Kann man die n-Eckseite konstruieren, so kann man es auch für die νn-Eckseite; wo die ν von $\nu = 2$ an in geometrischer Progression des Quotienten 2 aufeinander folgen.

2) Kennt man die Konstruktion des eingeschriebenen n-Ecks (*une certaine espece d'une figure reguliere*), so kennt man das umgeschriebene n-Eck.

Zum Schlusse wird die Konstruktion der Quadrat-, der Sechseck-, Dreieck-, Zehneck-, Fünfeckseite, endlich der Fünfzehneckseite als Differenz der Zehneck- und Fünfeckseite gelehrt.

Im XIII. Buch werden speziell Vierecke und Dreiecke behandelt.

Da die Seite eines jeden Dreiecks Basis des gegenüberliegenden Winkels ist, so können die für Winkel und deren Basis abgeleiteten Sätze unmittelbar auf das Dreieck angewandt werden.

Zunächst wird der Satz über die Winkelsumme rekapituliert.[1])

Jedem Dreieck läfst sich ein Kreis umschreiben. Daraus ersieht man unmittelbar, dafs der gröfsten Seite der gröfste Winkel gegenüberliegt; denn diese stützt den gröfsten Bogen des umgeschriebenen Kreises, welcher eben jenen gröfsten Winkel mifst.

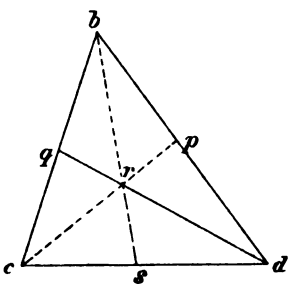


Fig. 21.

Der Satz, dafs die Winkelhalbierenden sich in einem Punkte schneiden, wird so bewiesen:

Die Halbierungslinien der Winkel bei c und d cp und dq mögen sich in r schneiden; ich behaupte, dafs br den Winkel b halbiert. Da Winkel d halbiert ist durch dq, so verhält sich

$$db : bq = dc : cq,$$

betrachtet man dq als Basis des Winkels bei c, der durch cr halbiert ist, so gilt ebenso:

$$cd : cq = dr : qr,$$

also

$$db : bq = dr : qr,$$

und demnach halbiert br den Winkel bei b. Dabei ergeben sich noch die weiteren Proportionen für Winkel b:

$$br : rs = bd : ds$$

$$br : rs = bc : cs$$

---

1) Der Beweis Arnaulds ist im neunzehnten Jahrhundert von M. A. Transon in den *Comptes rendus hebdomaires* Tom. 73, 1871 gegen die Nicht-Euklidische Geometrie ins Feld geführt worden. Wir haben die Stelle eingesehen.

Transons Verweis auf Arnauld wird von Paul Stäckel in seinem Buche: *Die Theorie der Parallellinien* Leipzig 1895 p. 231 erwähnt.

für Winkel c:

$$cr : rp = cd : dp$$
$$cr : rp = cb : bp,$$

für Winkel d:

$$dr : rq = db : bq$$
$$dr : rq = dc : cq.$$

Einige Konstruktionsaufgaben folgen.

Unter der Überschrift: *„Triangles comparez"* erscheinen die vier Kongruenzsätze. Sie werden mit Hilfe des umgeschriebenen Kreises und Parallelräumen bewiesen. Die nächsten Sätze betreffen ähnliche Dreiecke; sie werden möglichst eingeschränkt und hierfür auf die beiden Bücher über proportionale Strecken verwiesen. Arnaulds Einteilung der Dreiecke haben wir bei Besprechung der Logik wiedergegeben.

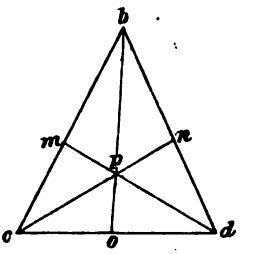


Fig. 22.

Das nächste Theorem ist das vom gemeinsamen Schnittpunkt der Perpendikel aus den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten (Höhenpunkt). Zwei der Perpendikel dm und cn mögen sich in p schneiden; ich behaupte, dafs auch bo, die Gerade durch den Schnittpunkt p jener, $\perp$ zu dc ist. Die Dreiecke cbn und dbm haben einen Winkel gemein; aufserdem sind sie rechtwinklig; also $\sphericalangle bcn$ und $\sphericalangle bdm$ gleich, folglich sind auch die Dreiecke bdm und cpm ähnlich (weil *equiangles*), also

$$dm : mc = mb : mp,$$

alternando

$$dm : mb = mc : mp,$$

also sind die Dreiecke bmp und dmc ähnlich, weil zwei Seiten in Proportion stehen und der eingeschlossene Winkel ein rechter ist, also $\sphericalangle mbp = \sphericalangle mdc$; ferner sind die Winkel mpb und opd als Scheitelwinkel gleich; also Dreieck mpb ähnlich dem Dreieck opd; aber $\sphericalangle pmb$ ex const. = R also auch $\sphericalangle pod$; q. e. d.

Durch die Perpendikel entstehen zwölf Dreiecke, sechs grofse, die zu Hypotenusen die Seiten des ursprünglichen besitzen, die sich gegenseitig teilweise überdecken, und sechs ganz getrennt liegende, deren Hypotenusen die Abschnitte der Transversalen gegen die Ecken hin sind. Diese zwölf Dreiecke sind zu vier und vier ähnlich.

Dabei ergeben sich einige bemerkenswerte Proportionen.

1) Ein Schenkel eines Winkels und sein Abschnitt gegen den Scheitel sind reziprok zum andern Winkelschenkel und dessen entsprechendem Abschnitt.

2) Die Abschnitte einer Seite, welche durch das zugehörige Perpendikel gebildet werden, sind reziprok zum ganzen Perpendikel und dessen Abschnitt gegen die Seite hin.

Der nächste Passus lautet: *Des triangles rectangles.* Wir finden hier den Satz: Im rechtwinkligen Dreieck, wo einer der spitzen Winkel $= 30^0$ ist, ist die ihm gegenüberliegende Kathete die Hälfte der Hypotenuse, und diese Kathete ist der Sinus von 30^0.

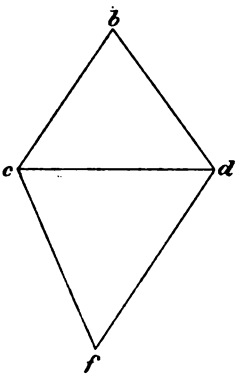


Fig. 23.

Der Beweis wird durch Verdoppelung des Dreiecks geführt, sodafs ein gleichseitiges entsteht.

Konstruktionsaufgaben über rechtwinklige Dreiecke aus gegebenen Stücken folgen.

Für gleichschenklige Dreiecke erwähnen wir den Satz: Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind und die Basis des einen Seite des andern ist, so ist diese Strecke mittlere Proportionale zwischen der Seite des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis sie ist, und der Basis der zweiten, wovon sie Seite ist. Denn, da die Dreiecke ähnlich sind, so verhält sich $bc : cd = cd : df$ oder $\therefore bc \,.\, cd \,.\, df$.

Der zweite Abschnitt von XIII handelt von den Vierecken. Seiten, die demselben Winkel anliegen, heifsen *„costez angulaires"*.

1) Satz: Jedes Viereck, dessen Summe gegenüberliegender Winkel $= 2\,\mathrm{R}$ ist, kann einem Kreise eingeschrieben werden, aber auch nur ein solches.

Ein Viereck dieser Eigenschaft sei $fbcd$; ich behaupte, dafs der Kreis, welcher durch cbf geht, auch den Punkt d treffen mufs. Denn jeder Winkel g mit der Basis fc, der dem Kreise in dem Segmente, in welchem d liegt, eingeschrieben ist, ergiebt mit $\sphericalangle b$ zusammen $2\,\mathrm{R}$. Also Winkel $fgc = \sphericalangle d$, weil nach Voraussetzung $\sphericalangle d$ mit Winkel b zwei Rechte beträgt. Also ist $\sphericalangle d$ dem Kreise eingeschrieben.

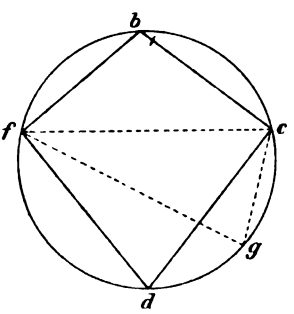


Fig. 24.

Die weiteren Sätze behandeln Parallelogramme. Den Schlufs bildet die Klassifizierung der Parallelogramme in einer Tabelle.

Den Schlufs des ganzen XIII. Buches bildet der Satz über das *„Pentagone"*: Zwei Diagonalen des regulären Fünfecks teilen sich gegenseitig nach dem goldenen Schnitt, und der gröfsere Abschnitt ist gleich der Fünfeckseite.

Beweis: Jede Fünfeckseite stützt einen Bogen von 72^0. Also ist

der Peripheriewinkel, wie z. B. bdc, der sich auf einen solchen Bogen stützt, $= 36^0$. Und der Peripheriewinkel, der sich auf zwei solche Bogen stützt, z. B. bcf, ist 72^0. Ebenso ist $\sphericalangle bgc$ nach einem im IX. Buche bewiesenen Satze und ebenso sein Scheitelwinkel $= 72^0$; also $bg = bc$.

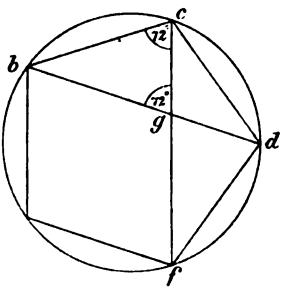


Fig. 25.

Also ist der Winkel cbg nach einem früher bewiesenem Satze ein solcher, dafs die Basis an die Seiten (den Winkelschenkel) angefügt eine nach dem goldenen Schnitt geteilte Strecke ergiebt, d. h.

$$bd : bg = bg : gd.$$

Das XIV. Buch lehrt die Inhaltsberechnung ebener Figuren (*Des figures planes considerées selon leur aire*). Voraus geht in einer *„Idee generale de la mesure des surfaces“* die Begriffsbestimmung des Inhalts. Wir heben daraus die Sätze hervor: Längen werden gemessen durch eine Strecke, die den Abstand zweier Punkte liefert; daher können krumme Linien nur durch Beziehung auf geradlinige Strecken gemessen werden. Ebenso können krumme Oberflächen nur durch Zuhilfenahme von Ebenen ausgemessen werden. Der Inhaltsberechnung kann man das Parallelogramm zugrunde legen, da dieses seine Länge und Breite direkt liefere; noch besser das Rechteck; oder endlich das Quadrat; *„comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'elle est plus simple“*. Als Axiome werden ferner vorangeschickt: Quadrate über gleichen Strecken sind inhaltsgleich: *„car il ne peut y avoir de difference que de situation“*; ebenso Rechtecke gleicher Basis und gleicher Höhe. Das Quadrat über einer Strecke heifst: *„puissance de cette ligne“*; auf diese Axiome wird die Anwendung der Regeln über die Multiplikation der *grandeurs complexes* gestützt bei Inhaltsberechnungen. Alle Sätze in Euklids zweitem Buche seien Anwendungen des Satzes: Das Produkt zweier Gröfsen ist gleich dem Produkt der einen in die Summe der Teile des andern.

Arnauld verifiziert diese und ähnliche Sätze in geometrischer Weise, z. B.:

$$\begin{aligned}(b+c+d+f+g)^2 = {} & b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 \\ & + 2bc + 2bd + 2bf + 2bg \\ & + 2cd + 2cf + 2cg \\ & + 2df + 2dg \\ & + 2fg\end{aligned}$$

ferner

$$(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$$

und

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Rechtecke gleicher Basis (Höhe) verhalten sich ihrem Inhalte nach wie ihre Höhen (Basen). *„Ähnliche Rechtecke stehen inbezug auf ihre Inhalte im (zusammengesetzten) doppelten Verhältnis entsprechender Seiten"* heifst: Ihre Inhalte verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

In einer *„Application de cette doctrine generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir cy devant estre proportionelles"* werden der Sehnen-, Sekanten-, Tangentensatz und die Sätze über das rechtwinklige Dreieck in Form von Produktensätzen ausgesprochen.

Der *pythagoräische Satz* wird so bewiesen: Die Hypotenuse sei h, ihre Abschnitte m und n, die Katheten b und d, also

$$\therefore h \,.\, b \,.\, m \quad \text{und} \quad \therefore h \,.\, d \,.\, n,$$

also, da

$$hm = bb \quad \text{und} \quad hn = dd,$$

ferner

$$hm + hn = hh,$$

so ist

$$hh = bb + dd$$

und ausgesprochen:

La diagonale d'un rectangle peut (!) *autant que les quarrez des deux costez.*

Als vierter Corollar erscheint der Satz: Im gleichseitigen Dreieck verhält sich das Quadrat über der Seite zum Quadrat der Höhe wie 4 : 3.

Als sechstes Theorem: Das Quadrat über der Basis eines spitzen Winkels ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Schenkeln vermindert um das doppelte Rechteck aus dem einen der Schenkel, auf welchen man vom andern Endpunkt der Basis ein Lot fällt, und dem dadurch entstandenen Abschnitt auf dem Schenkel gegen den Scheitel des spitzen Winkels hin.

Beim Beweis unterscheidet Arnauld zwei Fälle: Jener Schenkel, auf welchen das Lot gefällt wurde, macht mit der Basis einen spitzen oder stumpfen Winkel.

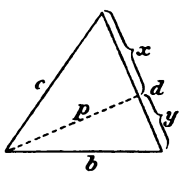


Fig. 26.

Beweis. Erster Fall:

$$d = x + y$$

$$bb = pp + yy$$

$$cc = pp + xx$$

$$dd = xx + yy + 2yx.$$

also

$$bb + 2xx + 2yx = cc + dd,$$

da

$$x = d - y,$$

so ist

$$xx = xd - xy,$$

also

$$xx + xy = dx$$

$$2xx + 2xy = 2dx,$$

also

$$bb = cc + dd - 2dx.$$

Zweiter Fall:

$$x = d + y$$
$$pp = cc - xx$$
$$pp = cc - dd - yy - 2dy$$
$$bb = pp + yy,$$

also:

$$bb = cc - dd - 2dy$$
$$bb = cc + dd - 2dd - 2dy,$$

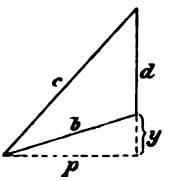


Fig. 27.

da

$$x = d + y$$
$$dd + dy = dx \quad \text{und} \quad 2dd + 2dy = 2dx,$$

also:

$$bb = cc + dd - 2dx.$$

Das VII. Theorem enthält den entsprechenden Satz für den stumpfen Winkel.

Die beiden folgenden Theoreme sind die Corollare der beiden vorhergehenden für einen stumpfen Winkel von 120^0 und einen spitzen von 60^0.

Das X. Theorem heifst: Das Quadrat über der Fünfeckseite ist gleich der Summe der Quadrate über der Zehneckseite und der Sechseckseite.

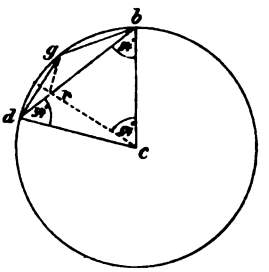


Fig. 28.

Zum Beweise weist Arnauld nach: 1) dafs die Sechseckseite bc mittlere Proportionale zwischen der Fünfeckseite bd und deren Abschnitt br ist. (Denn $\sphericalangle rcb = 54^0$; also Dreieck bdc und brc gleichschenklig und ähnlich.)

2) Die Zehneckseite dg ist mittlere Proportionale zwischen der Fünfeckseite bd und deren kleinerem Abschnitt dr. (Da r ein Punkt der Mittelsenkrechten von gd ist, so ist $rg = dr$, also die Dreiecke dgb und drg gleichschenklig und ähnlich; daraus nach einem im früheren bewiesenen Satze

$$db : dg = dg : dr,$$

also

$$db \cdot dr = dg^2 \quad \text{und nach 1)} \quad db \cdot br = bc^2;$$

da $db = dr + rb$ ist, so wird [nach der Formel

$$(dr + rb)^2 = [\underbrace{dr + rb}_{db}]dr + [\underbrace{dr + rb}_{db}]rb = db^2]$$

$$db^2 = dg^2 + bc^2 \quad \text{q. e. d.})$$

Das XI. Theorem lautet: Ist eine Strecke nach dem goldenen Schnitt geteilt, so ist das Quadrat über einer Strecke, welche die Summe der Hälfte der ursprünglichen und deren gröfserem Abschnitt ist, fünfmal dem Quadrat über der Hälfte der ursprünglichen gleich.

Es sei eine gegebene Strecke d[1]), der gröfsere Abschnitt b, die Hälfte von d gleich m, der kleinere Abschnitt c, dann ist

$$dc = bb \quad \text{und} \quad dd = bd + cd = bd + bb,$$

$$dd = 4mm \quad \text{und} \quad 2mb = bd,$$

aber

$$\begin{aligned}(m+b)^2 &= mm + bb + 2mb \\ &= mm + bb + db \\ &= mm + dd \\ &= mm + 4mm \\ &= 5mm \end{aligned}$$ q. e. d.

XII. Theorem: *Une ligne estant divisée en moyenne et extréme raison, la ligne composée de la petite portion et de la moitié de la plus grande peut 5 fois le quarrée de la moitié de la plus grande.*

Der dreizehnte Satz endlich ist: In einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke ist das Quadrat über der ganzen Strecke vermehrt um das Quadrat des kleineren Abschnitts dreimal dem Quadrat über dem gröfseren Abschnitt gleich.

Beweis:

$$d = b + c \quad \text{und} \quad \therefore d \,.\, b \,.\, c,$$

$$dd = bb + cc + 2cb$$

$$dd + cc = bb + 2cc + 2cb$$

$$2cc + 2cb = 2bb$$

da

$$cc + cb = bb \ (\text{da } bb = cd),$$

also

$$dd + cc = 3bb$$ q. e. d.

Den Schlufs des Buches bilden Aufgaben: Quadrate zu vereinigen, d. h. ihre Summe zu bilden; Rechtecke in Quadrate zu verwandeln; eine Strecke so zu teilen, dafs das Quadrat über dem gröfseren Abschnitt zum Rechteck aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt in gegebenem Verhältnis steht $(m : n)$.

Man hat

1) eine Strecke zu konstruieren, welche sich zu d wie m zu n verhält; sie sei c;

2) die mittlere Proportionale zwischen c und d zu konstruieren, sodafs $cd = p^2$;

3) einen Kreis zu konstruieren mit c als Durchmesser und p als Tangente; die Sekante an denselben vom Endpunkt von p aus liefert durch ihren äufseren Abschnitt x den gesuchten Abschnitt x der gegebenen

1) Man hat zu beachten, dafs bei Arnauld z. B. dc bald eine Strecke dc bedeutet, bald das Rechteck $d \cdot c$; hier ist das letztere gemeint.

Strecke d. Es ist leicht zu beweisen, dafs

$$x^2 : dy = m : n,$$

denn

$$d - x = y, \quad \text{also} \quad cd - cx = cy,$$

ferner

$$cd = p^2 \quad \text{und} \quad p^2 = x^2 + cx,$$

also auch

$$x^2 + cx = cd$$

$$x^2 = cd - cx = cy$$

und

$$cy : dy = c : d$$

$$c : d = m : n,$$

also

$$x^2 : dy = m : n. \qquad \text{q. e. d.}$$

Im siebenten Probleme wird die Wurzel der Gleichungen:

1) $y^2 = b^2 + yd$,
2) $x^2 = b^2 - xd$,
3) $y^2 = yd - b^2$ oder $x^2 = xd - b^2$

konstruiert.

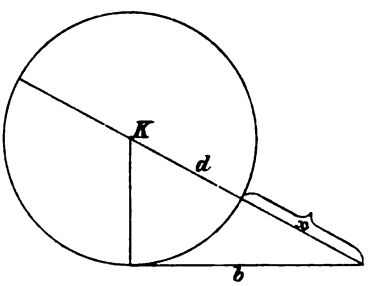


Fig. 29.

Beweis für $y^2 = b^2 + yd$. In diesem Falle ist die ganze Sekante die verlangte Strecke y;

denn

$$y = x + d$$

$$y^2 = yx + yd$$

$$b^2 = xy$$

also

$$y^2 = b^2 + yd.$$

Beweis für $x^2 = b^2 - xd$. Die gesuchte Strecke x ist hier der äufsere Abschnitt der Sekante;

denn

$$x : b = b : x + d,$$

also

$$x^2 + xd = b^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = b^2 - xd.$$

Für $y^2 = yd - b^2$ zeichnet Arnauld die nachstehende Figur.

Für $b \geqq \frac{d}{2}$ ist die Konstruktion unmöglich.

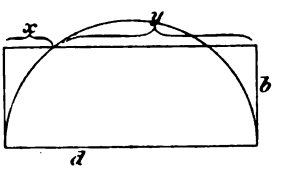


Fig. 30

x und y genügen beide der Aufgabe;

denn

$$d = x + y \quad \text{und} \quad xy = b^2$$

$$xx + xy = xd \quad \text{und} \quad yy + xy = yd,$$

also

$$xx = xd - xy \quad \text{oder} \quad xx = xd - b^2$$

und

$$yy = yd - xy \quad \text{oder} \quad yy = yd - b^2.$$

Der Titel des XV. und letzten Buches heifst: *„De la mesure de l'aire des parallelogrammes, des triangles et d'autres polygones"*.

Hier interessiert uns besonders, was Arnauld von der neuen *„Geometrie der Indivisibilien"* sagt.

„Obwohl die Geometer einig darin sind, daſs die Gerade nicht aus Punkten, die Fläche nicht aus Linien, noch der Körper aus Flächen besteht, so hat man doch seit kurzer Zeit einen Kunstgriff aufgefunden, um eine Unmasse von Dingen zu beweisen, indem man die Oberflächen als aus Linien, den Körper aus Flächen zusammengesetzt betrachtet. Ich habe nichts darüber Geschriebenes zu Gesicht bekommen, hier aber setze ich auseinander, wie ich mir die Sache zusammenreime, indem ich mich auf Flächen beschränke.

Die Grundlage dieser neuen geometrischen Methode ist, den Inhalt eines Flächenstücks als die Summe der Linien anzusehen, welche es erfüllen; sodaſs zwei Flächenstücke als gleich angesehen werden, wenn beide von der gleichen Summe gleichartiger Linien erfüllt sind; sei es, daſs eine jede der einen Summe gleich ist einer jeden der andern Summe, oder daſs ein Ausgleich stattfindet, sodaſs zwei derselben Summe, welche untereinander ungleich sein können, zusammengenommen zweien aus der zweiten Summe gleich sein können, die wieder unter sich gleich sein mögen.

Um aber nicht zu vielen Widersprüchen Anlaſs zu geben, in welche man leicht verfällt, wenn man sich dieser Methode bedient, hat man zu bemerken:

1) Damit Linien als einen Raum erfüllend angesehen werden dürfen, müssen sie alle untereinander parallel sein, sei es, daſs sie Gerade sind, welche einen geradlinigen Raum erfüllen, sei es, daſs sie als Kreise Kreisflächen oder Teile von solchen einnehmen. Der Grund davon ist leicht einzusehen. Man muſs sich also sehr hüten, andere als solche Gerade in Anwendung zu bringen, welche in der einen oder andern Art parallel sind.

2) Damit man sagen kann, daſs eine Summe von Linien einer andern gleich sei, darf man nicht annehmen, daſs man die Zahl der Linien angeben kann, welche den Raum erfüllen; denn es giebt keinen noch so kleinen ebenen Raum, der nicht von einer unendlichen Anzahl erfüllt ist; sondern darin liegt das Wesen der Sache, wenn man sagt, daſs zwei Liniensummen gleich seien, daſs die eine Gesamtheit sowohl als die andere zwei gleiche Strecken lotrecht schneiden; denn es liegt kein Grund vor, anzunehmen, daſs man durch eine der gleichen Strecken mehr Gerade senkrecht hindurchgehen lassen könne als durch die andere. Denn aliquote Teile der einen werden bis ins Unendliche immer gleich sein denselben Aliquoten der andern, und man wird durch die Teilpunkte hüben und drüben gleich viele unter sich parallele Geraden ziehen können, welche hüben und drüben einen gleichen Parallelraum begrenzen werden. Hiervon hängt die Wahrheit dieser Methode ab (sie besteht nicht darin, daſs das Continuum aus Indivisibilien zusammengesetzt

sei, wie einige behaupten); und dies hat Veranlassung gegeben, diese Methode 'Geometrie des Unendlichen' zu heifsen."

Wörtlich aus den *Nouveaux Elemens.*

In fünf Theoremen setzt Arnauld nach der neuen Methode die Gleichheit von Parallelogrammen gleicher Basis und Höhe, von Dreiecken, ihr Inhaltsverhältnis bei gleicher Basis (Höhe) auseinander. Wir geben nur das fünfte, als das interessanteste, wieder: Der Kreis ist an Inhalt gleich einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete dem Radius, dessen andere dem Kreisumfang gleich ist.

Beweis. Der Kreis sei um d mit Radius db beschrieben. Die Tangente in b sei dem Kreisumfang gleich. Zieht man durch alle Punkte des

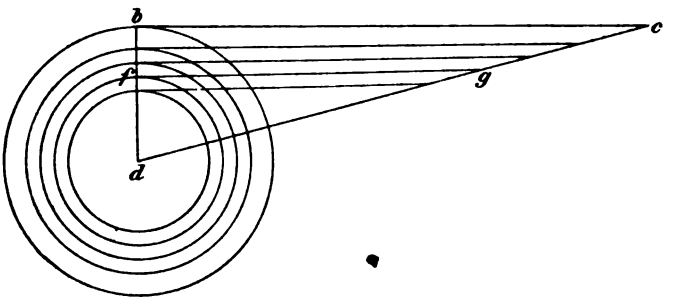


Fig. 31.

Radius konzentrische Kreise, so werden sie die Kreisfläche erfüllen; sie sind alle parallel und werden durch den Radius lotrecht geschnitten. Zieht man durch die Durchschnittspunkte des Radius Parallelen zu bc, so werden diese das rechtwinklige Dreieck erfüllen. Die Summe der konzentrischen Kreise und dieser Parallelen ist aber dieselbe, denn durch jeden Punkt des Radius, durch welchen einer der konzentrischen Kreise geht, kann man eine Parallele ziehen und umgekehrt. Der durch einen und denselben Punkt gehende Kreis und die zugehörige Parallele sind aber an Länge gleich, wie man sieht, wenn man einen ganz beliebigen prüft, z. B. den durch f; denn

$$bd \,.\, df :: \begin{cases} \text{Kreis durch } b \,.\, \text{Kreis(umfang) durch } f \\ bc \,.\, fg \end{cases}$$

(in ähnlichen Dreiecken aber auch:

also Kreis(länge) durch b : Kreis(länge) durch $f = bc : fg$.

alternando: Kreis durch $b : bc =$ Kreis durch $f : fg$,

nach Voraussetzung ist aber Kreis durch $b = bc$, also mufs Kreis durch f auch $= fg$ sein.

Auf den letzten Seiten (S. 311—323) des ganzen Werkes wird die

Inhaltsberechnung in der herkömmlichen Weise gelehrt (*„Methode commune“*). Wir finden die bekannten Sätze über den Inhalt der Parallelogramme, Dreiecke und ähnlichen Figuren. Z. B. ähnliche Figuren verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate homologer Seiten. Wir heben die Verallgemeinerung des pythagoräischen Satzes (*proposition des quarrez*) hervor. Konstruiert man über den Katheten und der Hypotenuse ähnliche Figuren, so ist die Summe der ersteren gleich dem Inhalte der Figur über der Hypotenuse. Der Inhalt einer regulären Figur ist dem Rechteck aus dem halben Perimeter und dem Radius des eingeschriebenen Kreises (*raion droit*) gleich. Die Quadratur des Kreises wird nach Archimeds Verfahren mit Hilfe der ein- und umgeschriebenen regulären Polygone nochmals entwickelt.

Reguläre Figuren derselben Art verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen Kreise. Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Ähnliche eingeschriebene Figuren verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der Kreisradien.

Den Schlufs macht die Verwandlung einer Figur von n Ecken in eine inhaltsgleiche von $n - 1$ Ecken.

Am Schlufs des ganzen Werkes heifst es: *„Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraie methode qui doit traitter les choses simples avant les composées et les generales avant les particulieres, je pense avoir satisfait à ce dessin et avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cet ordre de la nature en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes; au lieu qu'il est clair, ce me semble par cet essay que les Elemens de Geometrie estant reduits selon l'ordre naturel, peuvent etre aussy solidement demonstrez et sont sans comparaison plus aisez à concevoir et à retenir.“*

Diese zuversichtlichen Worte konnte nur der sprechen, dem ein Pascal rückhaltslose Bewunderung gezollt hatte.

Die Quadrati magico-magici angeregt durch Pascal.

Mit der *Geometrie* Arnaulds vereinigt erschien eine Abhandlung über magische Quadrate. Wir geben hier zunächst einen kurzen Rückblick über die Geschichte dieses zahlentheoretischen Problems.

Ein magisches Quadrat heifst eine Anordnung von n^2 Zahlen einer arithmetischen Progression in die n^2 Zellen eines Quadrats derart, dafs die Summe jeder Zeile, jeder Kolonne, sowie jeder der Diagonalen ein und dieselbe konstante Gröfse ist.

Die magischen Quadrate sollen ihren Ursprung in Indien besitzen. Sicher ist, dafs das erste im Abendland auftretende magische Quadrat sich auf dem *„Melencolia"* genannten Kupferstich Albrecht Dürers befindet. Es bildet hier ein Symbol der grübelnden Vernunft, speziell auch der Wissenschaft der Zahl. Jener Kupferstich wird nach Angabe des bekannten Kunstschriftstellers Nagler in das Jahr 1514 verlegt. In den nächsten Jahrzehnten bedienten sich Männer wie Agrippa von Nettesheim und Theophrastus Paracelsus von Hohenheim der magischen Quadrate zu astrologischen und medizinisch-mystischen Zwecken auf Amuletten und sorgten so zur Verbreitung der Kenntnis dieser Gebilde. Das mathematische Interesse daran tritt uns bei Adam Riese und in Michael Stiefels 1544 erschienener *„Arithmetica integra"* entgegen. Auf letzteren Schriftsteller werden wir noch zurückkommen. In Deutschland sind von bekannteren Namen der Mathematiker, die sich mit dem Gegenstande beschäftigten, noch Dan. Schwenter in seinen *„Deliciae physico-mathematicae"* Nürnberg 1626 und Johann Faulhaber zu nennen. In Frankreich wandte *„der grofse Reformator der unbestimmten Analytik"*, Gaspard Bachet de Méziriac den magischen Quadraten sein Interesse zu. In seinen *„Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres"* á Lyon MDCXXIV lehrte er eine von ihm geschaffene bezw. erweiterte Methode zur praktischen Konstruktion magischer Quadrate, welche in der Litteratur unter der Bezeichnung *„Terrassenmethode"* bekannt ist.

Wir sind in dieser kurzen Skizze der Darstellung gefolgt, welche Siegmund Günther in seinem Aufsatze *„Historische Studien über die magischen Quadrate"* Kap. IV seiner *„Vermischten Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften"* gegeben hat. Dieser Aufsatz ist grundlegend geworden und an ihn werden wohl immer Untersuchungen und gerade historische Erörterungen über magische Quadrate anzuknüpfen haben.

Nach der Würdigung von Bachets Verdiensten fährt Günther fort:

„An Bachet scheint sich auch Arnauld in seiner Geometrie angelehnt zu haben; sicherlich ist er nicht weit über sein Vorbild hinausgegangen. Wegen Mangels der Quelle können wir jedoch den eigentlichen Wert seiner Bemühungen nicht übersehen."

Günther hat also Arnaulds Arbeit nicht vor sich gehabt. Daraus wird es erklärlich, wenn die wahre Sachlage sich im Widerspruch zu Günthers Bemerkung befindet; daher wird es erklärlich, wenn Günther in einer Fufsnote beifügt: *„Arnaud, Nouveaux élémens de géométrie, Paris MDCCLXVII"*, während wir früher in unserer Bibliographie von Arnaulds *Géométrie* sahen, dafs wohl 1667 die editio princeps, weitere Ausgaben 1683, 1680 und 1711 erschienen, dagegen 1767 keine; die zuletzt er-

schienene in den gesammelten Werken ist von 1783. Die Erwähnung von Arnaulds Arbeit über magische Quadrate bei Günther ist die einzige, welche sich in der modernen Litteratur findet, und dies veranlafst uns, da auch in Frankreich in den letzten Jahrzehnten das Interesse für magische Quadrate sich wieder neu belebt zu haben scheint, hier in einem Abdruck nebst Übersetzung die Methode unseres Autors weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

Rechtfertigt schon die Seltenheit und schwere Zugänglichkeit des Originals diesen Plan, so läfst eine interessante Bemerkung, welche wir beim Studium des Verhältnisses von Arnauld zu Pascal machten, die Herausgabe sogar zum dringenden Wunsche werden.

In Pascals *Gesammelten Werken* (Paris 1880 bei Hachette) findet sich Bd. III S. 219 in jenem Programme, welches Pascal 1654 der entstehenden Pariser Akademie über seine mathematischen Arbeiten vorlegte, folgende Stelle:

„Deinceps autem, si juvat Deus, prodibunt et alii tractatus quos omnino paratos habemus, et quorum sequuntur tituli: De numeris magico magicis; seu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato numero contentos, ita ut non solum quadratus totus sit magicus; sed quod difficilius sane est, ut ablatis singulis ambitibus reliquum semper magicum remaneat, idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso.[1])

Diese bisher nicht beachtete Stelle ist ein neuer Beweis des Zusammenarbeitens von Pascal und Arnauld auf mathematischem Gebiete; denn will man nicht geradezu annehmen, in der in Rede stehenden Arbeit Pascals verlorenen Traktat vor sich zu haben, so kann man nur an eine Parallelarbeit Arnaulds denken, welche wieder durch Pascal angeregt war. Sind durch Edmund Lucas' Aufsatz im *Journal de mathem. élém.* 1887 *„Les carrés magiques de Fermat"* die Arbeiten Fermats auf diesem Gebiete aufgehellt worden, so hoffen wir durch unsere Publikation das Bild der Leistungen des französischen Dreigestirns Fermat—Pascal—Arnauld über magische Quadrate zu vervollständigen.

---

1) In dem *Privilege du Roy*, welches nur die erste Ausgabe von 1667 enthält, finden sich an Stelle des Autors die Initialen *par M. D. M. G. B.* Sollten sie sich auf Pascals Anteil an den magischen Quadraten beziehen und etwa zu deuten sein: *par M. de Montalte, Géomètre béni, brillant,* oder dergleichen? Herr Paul Tannery, einer der besten Kenner der Geschichte des XVII. Jahrh., ist der Ansicht, dafs jene Initialen nur die Mittelspersonen bedeuten, welche das Privilege auswirkten. Wir haben also etwa an den Freund und Bekannten Pascals: M. de Montigny, Gentilhomme Bretonnois, zu denken.

SOLVTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLE' COMMUNEMENT
LES QVARREZ
MAGIQUES.

Solution d'un des plus celebres et des plus difficiles Problemes d'Arithmetique, appellé communement Les Quarrez magiques.

§ 1. Ce que c'est que ce probleme.

I. Ayant un quarré de cellules pair ou impair. Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1.2.3.4 *etc. Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme* 2.5.8.11.14 *etc.*

Disposer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules semblables à celuy là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit mesme les deux diagonales; fassent toujours la mesme somme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs et de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traitté.

§ 2. Considerations sur les Quarrez naturels.

II. J'appelle quarrez naturels ceux où les chiffres sont disposez en progression arithmetique en commençant par les plus petits.

Sur les Quarrez impairs.

III. Dans le milieu du quarré impair il y a une cellule qui en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé centre et marqué par c.

IV. De tous les autres chiffres la moitié sont plus petits et les autres plus grands que le centre. Les uns soient appellez simplement petits et les autres grands.

V. Les cellules autour du centre soient appellées 1re *enceinte.*
Autour de la premiere enceinte, 2e *enceinte.*
Autour de la seconde enceinte, 3e *enceinte.*
Et ainsy de suite.

VI. Les enceintes $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ *etc. soient appellées enceintes impaires.*

Les $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$ *etc. enceintes paires.*

VII. Il est important de considerer dans chaque enceinte où sont les petits chiffres, et où sont les grands. Les petits sont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui est de 3 dans la 1re *enceinte, de 5 dans la* 2e*, de 7 dans la* 3e *etc.*

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre inclusive.

Troisiémement dans la bande à droit les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre exclusive.

Sur les Quarrez pairs.

VIII. Il n'y a point de cellule qui soit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la somme que font le premier et le dernier chiffre.

Et cette somme entiere s'appellera 2c.

IX. La moitié des bandes, sçavoir celles qui sont les plus hautes contiennent les petits chiffres, et les plus basses les grands.

X. Les quatre cellules du milieu font la 1re *enceinte.*

Les cellules autour de ces quatre, la 2e *enceinte.*

Celles autour de la seconde, la 3e *enceinte.*

Et ainsy de suitte.

XI. Les enceintes $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ *etc. soient aussy appellées les enceintes impaires.*

Et les $2 \cdot 4 \cdot 6$ *etc. les paires.*

XII. Les petits chiffres sont,

1. *Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.*
2. *Au costé gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.*
3. *Et de même au costé droit.*

§ 3. Preparation.

XIII. Le plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques uns des petits chiffres de chaque bande.

Quarrez impairs.

XIV. Dans toutes les enceintes generalement marquer le coin à gauche de la bande d'enhaut par e.

Le coin à droit de la même bande par o.

Le milieu de cette bande par m.

La cellule à gauche qui est vis à vis le centre par α.

XV. Marquer de plus dans les enceintes paires

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'e, l'autre d'o, par les mêmes lettres accentüées.

L'une par $\grave{e}$.

L'autre par $\grave{o}$.

Et la cellule à gauche au dessous d'e par ω.

Et au costé droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis à vis le centre par β.

Dans les Quarrez pairs.

XVI. Ne rien marquer dans les premieres et secondes enceintes.

XVII. Dans toutes les autres generalement marquer

Le coin à gauche d'enhaut par e.

A droit par o.

Le plus bas des petits nombres à droit par α.

Les plus bas des petits nombres à gauche par β.

XVIII. Marquer de plus dans les enceintes impaires à commencer par la 3e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut)

4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par $\begin{cases} é. \\ ó. \end{cases}$

et deux par $\begin{cases} ê. \\ ô. \end{cases}$

selon ce qui a esté dit supra 15.

A gauche marquer la cellule au dessous d'e par ω.

Et à droit celle au dessus d'α *par* γ.

§. 4. Maximes pour la demonstration de l'operation.

XIX. Deux chiffres, l'un petit, l'autre grand, également distans du centre, et qui se joignent par une ligne passant par le centre font une somme égale à deux fois le centre.

XX. Quand un petit chiffre est marqué par une lettre, son grand soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la même lettre, quoiqu'elle ne soit pas marquée.

Ainsy $e \cdot E$ *font deux fois le centre.*

Et de même $\alpha \,.\, A$, *ou* $\beta \,.\, B$ *ou* $o \cdot O$.

Seconde Maxime.

XXI. Quatre chiffres dans la même bande, dont le premier est autant distant du 2, que le 3 du 4 sont en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

Exemples.

XXII. $e \cdot è :: ò \cdot o$. *Donc* $e \cdot o = è \cdot ò$.

D'où il s'ensuit que par tout où sont ensemble $è \cdot ò$, *ou bien* $ê \cdot ô$, *ou leurs majuscules* $\grave{E}\ \grave{O}$, *on peut supposer, lorsqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'estoit* $e \cdot o$, $E \cdot O$, *parceque si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est* $e \,.\, o$, *elle ne sera pas troublée en remettant* $è \cdot ò$, *en leur place, qui valent autant que* $e \cdot o$.

XXIII. $e \cdot m :: m \cdot o$. *Donc* $e \cdot o = m \cdot m$.

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. $e \cdot \omega :: \beta \cdot A$. *Donc* $e \cdot A = \omega \cdot \beta$.

Pour trouver A. voyez supra 20.

Troisieme Maxime.

XXV. Lorsque 4 cellules font un parallelogramme, rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres sont en proportion arithmetique. Et par consequent la somme des extrémes est égale à la somme de ceux du milieu.

Exemples.

Dans les Quarrez impairs.

XXVI. $e \cdot m :: \alpha \cdot c$. *Donc* $e \cdot c = m \cdot \alpha$.

XXVII. $m \cdot o :: \alpha \cdot c$. *Donc* $m \cdot c = o \cdot \alpha$.

XXVIII. $\omega \cdot m :: c \cdot \beta$. *Donc* $\omega \cdot \beta = m \cdot c$.

Dans les pairs.

XXIX. $e \cdot o :: \beta \cdot \alpha$. *Donc* $e \cdot \alpha = o \cdot \beta$.

XXX. $\omega \cdot \beta :: o \cdot \gamma$. *Donc* $\omega \cdot \gamma = \beta \cdot o$.

§ 5. Methode pour disposer magiquement le Quarré naturel.

XXXI. Cette methode consiste en fort peu de regles; les unes generales, les autres particulieres, selon lesquelles il faut transposer les chiffres du quarré naturel dans le magique.

Premiere regle generale.

XXXII. Il faut disposer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte semblable, et tout le soin qu'on doit avoir d'abord, est de sçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parceque la situation des petits donne celle des grands selon les deux regles suivantes.

Seconde regle generale.

XXXIII. Quand on a placé un petit chiffre dans un coin, il faut placer son grand dans le coin diagonalement opposé. Ainsi α estant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'embas.

Troisieme regle generale.

XXXIV. Hors les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande opposée.

C'est pourquoy il faut observer de ne mettre jamais deux petits en des bandes opposées vis à vis l'un de l'autre.

Corollaire de ces regles.

Les chiffres estant disposez selon ces regles,

XXXV. Il s'ensuit 1. Que les chiffres de deux bandes opposées pris ensemble, valent autant de fois c qu'il y a de chiffres dans les deux bandes.

Car un petit et un grand valent deux fois c. Or il y a autant de petits, que de grands. Donc

XXXVI. Il s'ensuit 2. Que lorsqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande après cette disposition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande est égale à son opposée.

XXXVII. Il s'ensuit 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'opposée, et que la somme des uns est égale à la somme des autres, c'est une marque assurée que la bande est égale à la bande.

La preuve en est facile sans que je m'arreste à l'expliquer.

Quatrieme regle generale.

XXXVIII. Il ne faut se mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui sont marquez par des lettres: car cela fait, le reste se trouve sans peine par cette raison.

Dans la bande d'enhaut, dans quelques quarrez et quelques enceintes que ce soit, outre les cellules marquées par des lettres:

Ou il ne reste rien,

Ou il reste toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair; c'est à dire 4 · 8 · 12 · 16 *etc.*

Et de plus, ils sont toûjours 4 *à* 4 *en proportion arithmetique.*

Donc prenant les extrêmes et les mettant dans une bande, et ceux du milieu dans l'opposée, ils ne troubleront point l'égalité qui y estoit déjà par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en est de même des deux costez droit et gauche. Car les petits chiffres qui restent (s'il en reste outre les marquez) sont toûjours en nombre pairement pair 4 · 8 · 12 · 16 *etc. et de* 4 *en* 4 *en proportion arithmetique.*

Donc comme cy dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§ 6. Regles Particulieres pour les Quarrez impairs.

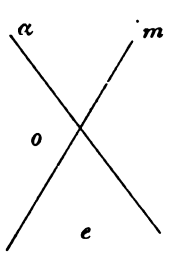


Fig. 32.

XL. Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, et l'autre pour les paires.

Pour les enceintes impaires.

Au coin gauche de la bande d'enhaut mettre α
Au coin droit de la même bande, m
A la bande d'embas en quelque cellule hors les coins, e
*A la bande de costé du costé d'*α. o

Demonstration.

XLI. Il est requis premierement à demonstrer que dans la bande d'enhaut $\alpha \cdot E \cdot m$ *valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'embas par 36.*

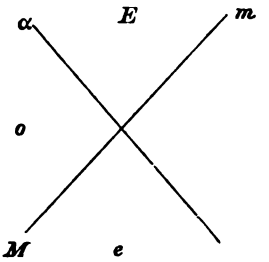


Fig. 33.

Or par (26) $e \cdot c = \alpha \cdot m$

Donc $e \cdot c \cdot E = \alpha \cdot E \cdot m$

Or $e \cdot c \cdot E = 3c$ *par 20.*

Donc $\alpha \cdot E \cdot m = 3c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

XLII. Requis secondement à demonstrer que $\alpha \cdot o \cdot M$ *valent* $3c$. *D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée par 36.*

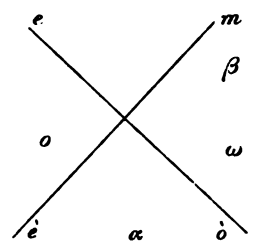


Fig. 34.

Or par (27) $\alpha \cdot o = m \,.\, c.$

Donc $m \cdot c \cdot M = \alpha \cdot o \,.\, M.$

Or $m \cdot c \cdot M = 3c$ *par 20.*

Donc $\alpha \cdot o \cdot M = 3c.$

Pour les enceintes paires.

XLIII. Il suffira de les figurer tout d'un coup.

Demonstration.

XLIV. Requis premièrement à demonstrer que la bande d'embas $M \cdot è \cdot \alpha \cdot ò \cdot E = 5c$. *C'est à dire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.*

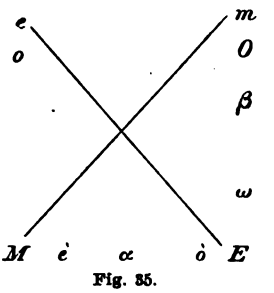


Fig. 35.

Ce qui se prouve ainsy

Par (27) $\alpha \cdot o = m \cdot c.$

Donc $e \cdot \alpha \cdot o = e \cdot m \cdot c.$

Donc $e \cdot m \cdot c \cdot M \cdot E = è \cdot \alpha \cdot ò \cdot M \cdot E$ *par (22)*

Or $e \cdot m \cdot c \cdot M \cdot E = 5c$ *par 20*

Donc $M \cdot è \cdot \alpha \cdot ò \cdot E = 5c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

XLV. Requis secondement à demonstrer que dans la bande droitte $m \cdot O \cdot \beta \cdot \omega \cdot E = 5c$. *Ce qui se prouve ainsy:* $c \cdot o = m \cdot m$ *par (23)*

Donc $e \cdot o \cdot c = m \cdot m \cdot c.$

Or $m \cdot m \cdot c = m \cdot \omega \cdot \beta.$

Parceque $m \cdot c = \omega \cdot \beta$ *par 28.*

Donc $e \cdot o \cdot c = m \cdot \omega \cdot \beta.$

Donc $e \cdot o \cdot c \cdot E \cdot O = m \cdot \omega \cdot \beta \cdot E \cdot O.$

Or $e \cdot o \cdot c \cdot E \cdot O = 5c$ *par 20.*

Donc $m \cdot O \cdot \omega \cdot \beta \cdot E = 5c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

§ 7. Pour les Quarrez pairs.

XLVI. On laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere.

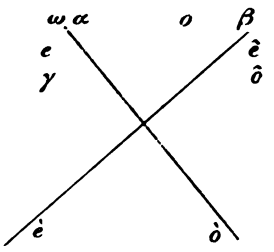


Fig. 36.

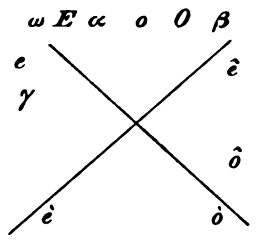


Fig. 37.

Pour les autres enceintes impaires.

XLVII. La disposition s'en figure ainsy.

Demonstration.

XLVIII. Requis 1. à demonstrer que les six chiffres de la bande d'enhaut dont quatre sont petits, et deux grands qui viennent de è et ò qu'on a mis embas, valent six fois le centre. Ce qui se prouve ainsy.

$$\alpha \cdot A \cdot o \cdot O \cdot e \cdot E = 6c \text{ par (20)}$$

Or ces six lettres sont égales aux six

$$\omega \cdot E \cdot \alpha \cdot o \cdot O \quad \beta.$$

Car ostant les mêmes qui se trouvent de part et d'autre, sçavoir $\alpha \cdot o \cdot O \cdot E$ *il ne restera d'un costé que* $A \cdot e$ *et de l'autre que* $\omega \cdot \beta$.

Or par (24) $A \cdot e = \omega \cdot \beta$.

Donc les six lettres $\omega \cdot E \cdot \alpha \cdot o \cdot O \cdot \beta = 6c$.

XLIX. Requis 2. à demonstrer que

$$\omega \cdot e \cdot \gamma = \beta \cdot \hat{e} \cdot \hat{o}.$$

Car si cela est, les grandes seront aussy égales aux grandes, et le tout au tout par (37).

Supposant donc que $\hat{e} \cdot \hat{o}$ *soient* $e \cdot o$ *(supra 22) et ostant e et e de part et d'autre, reste d'une part* $\omega \cdot \gamma$ *et de l'autre* $\beta \cdot o$ *qui font des sommes égales par (30).*

Donc $\omega \cdot e \cdot \gamma = \beta \cdot \hat{e} \cdot \hat{o}$.

Donc la bande égale à la bande par (37).

Pour les enceintes paires.

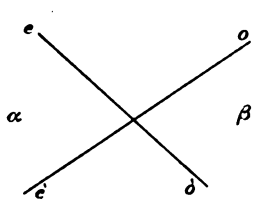


Fig. 38.

L. La disposition en est tres facile, et se figure ainsy.

Demonstration.

LI. Elle est si facile par 22, 29 et 37 que je ne m'amuse pas à l'expliquer.

Cette enceinte se peut encore faire en transposant les coins etc.

§ 8. Regle particuliere pour la premiere et seconde enceinte des Quarrez pairs.

LII. Ces deux enceintes ne sont autre chose que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes.

Quatre qui font la seconde enceinte, et qu'on peut appeller les bandes exterieures. Et quatre autres qui coupent le quarré, et qu'on peut appeller transversales: sçavoir la 2e et la 3e de haut en bas.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Et la 2e et la 3e de gauche à droit.

LIII. Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles des autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, et deux en diagonale, les bandes droittes ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales.

LIV. Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable; sçavoir en plus de 20 millions de millions.

20 : 922 : 789 : 872 : 000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'est à dire où toutes les bandes fassent des sommes égales (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même quarré).

Et voicy comme on les trouve.

LV. Il faut prendre toujours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. *Les quatre du dedans ou interieurs.*
2. *Les quatre coins exterieurs.*
3. *Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.*
4. *Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.*

Or chacun de ces chiffres pris ainsy 4 à 4 (et qu'on nommera dans la suite par $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$*) peuvent.*

Ou estre laissez en leur même place, ce qui se marquera par o.
Ou estre transportez en croix S. André, ce qui se marquera par c.
Ou directement de gauche à droit; ce qui se marquera par g.
Ou directement de haut en bas; ce qui se marquera par h.

LVI. Suivant ces remarques, et se souvenant de ce que signifient les 4 nombres $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$ *et les 4 lettres* $(o \cdot c \cdot g \cdot h)$ *les deux tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du quarré de 4: ou ce qui est la même chose des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs.*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
1.	o	o	o	o	c	c	c	c	g	g	g	g	h	h	h	h
2.	o	c	g	h	o	c	g	h	o	c	g	h	o	c	g	h
3.	c	g	c	g	h	o	h	o	h	o	h	o	c	g	c	g
4.	c	h	h	c	g	o	o	g	c	h	h	c	g	o	o	g

LVII. De ces 16 dispositions magiques du quarré de 4. il y en a deux, sçavoir la 1e et la 6e, où on ne change que 8 chiffres.

Deux, sçavoir la 11e et la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6e disposition, et un autre de la 16e. On laisse à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Demonstration.

LIX. Chaque bande tant exterieure que transversale du quarré de quatre (ou du quarré composé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit donc par exemple, la somme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée b, la somme des moyens qui luy est égale pourra estre aussy appellée b, et ainsy tout la bande sera $b + b$.

Et par la même raison la bande d'embas pourra estre $f + f$.

Cela estant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1re en transposant les extrêmes de l'une à l'autre sans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f + b$.

Et l'autre $b + f$ et ainsy seront égales.

La 2e en transposant les moyens sans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra $b + f$ et l'autre $f + b$ et ainsy seront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy a chacune de ces 16 dispositions, et l'on verra que les transpositions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. Divers Moyens de varier les Quarrez magiques.

De ces moyens j'omets ceux qui sont trop faciles à trouver et je n'en marqueray que deux qui sont plus importans, et qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

Premier Moyen.

LX. Nous avons supposé qu'on transporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la 1re enceinte du quarré magique; et ceux de la 2e dans la 2e, et de la 3e dans la 3e etc. Mais cela n'est pas necessaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il suffit de ne les transporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui soit impaire, comme de la 5e à la 1re; et d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e.

Second Moyen.

LXI. Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut transporter de quelque enceinte que ce soit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvu qu'on en prenne quatre ensemble qui soient en proportion arithmetique, et qu'on ait soin de mettre les extrêmes dans une bande, et les moyens dans la bande opposée.

Conclusion.

LXII. Je pense pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'est pas possible de trouver une methode plus facile, plus abregée et plus parfaitte pour faire les quarrez magiques, qui est un des plus beaux Problemes d'Arithmetique.

Ce qu'elle a de singulier, c'est

1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on est toujours assuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne sont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonstration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode est si generale que sans y rien changer on pourroit resoudre sans aucune peine par la même voie cet autre Problême qui paroist encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progression geometrique, comme 1 · 2 · 4 · 8 · 16 *etc. les disposer de telle sorte dans un quarré semblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres fassent une somme égale à celle que font les nombres de tout autre bande multipliez aussy les uns par les autres. En voicy un exemple dans le quarré de trois.*

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Fin de l'explication des Quarrez magiques.

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XII.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

Diskussion von Arnaulds Methode zur Bildung der Quadrati magico-magici.

Der vorstehend gegebene Abdruck von Arnaulds Abhandlung zeigt, dafs Arnauld nicht wie Bachet einfach magische Quadrate bildet, sondern eben die, von denen Pascal an der zitierten Stelle spricht: magisch-magische. Jene Stelle aus Pascals Programm von 1654, das beiläufig bemerkt auch Leibniz handschriftlich vorgelegen hat, er schreibt darüber unterm 12. Juni 1675 an Oldenburg in jenem Briefe, welchen wir oben schon zu erwähnen hatten: *Repertum est inter scripta eius (Pascalii) quoddam dedicationis genus, quo opera sua Geometrica et Numerica Academiae nescio cui Parisinae (id est conventui Geometricarum privato, illo tempore celebri) inscribit, et scripta sua in eo genere absoluta aut affecta memorat, quod credo non illubenter leges, inde enim destinata viri liquidius disces. Mittam descriptum, si tibi non ingratum fore significabis. Mitterem statim si e vestigio describi posset),* zeigt zugleich, dafs Pascal derjenige ist, welchem diese Quadrate ihren Namen verdanken. Zur Bildung magisch-magischer Quadrate war 1544 schon Michael Stiefel gelangt, doch ist seine Methode vollständig verschieden von der Arnaulds. Neuere Schriftsteller, z. B. Ahrens in seinen *„Mathematischen Unterhaltungen und Spielen"*, Leipzig 1901, ein Buch, das diese Dinge wissenschaftlich beleuchtet, nennt Stiefels Methode durch Originalität ausgezeichnet. Natürlich konnte Stiefel seine Methode nur an einzelnen Zahlenbeispielen darlegen; in neuerer Zeit hat man in der allgemeinen Sprache der Buchstabenrechnung eine Darstellung gegeben (Fontès, *Assoc. franc. Congrès de Bordeaux* XXIV 1895 t. II pag. 248—256). Stiefel fand eine Methode, um den „Umlauf" (bei Günther, *„ambitus"* bei Pascal, und *„enceinte"* bei Arnauld) eines magischen Quadrats *„independent"*, d. h. ohne Zuhilfenahme der übrigen zu bilden. Günther hat sich die Frage vorgelegt, wie ist wohl Stiefel zu seinem höchst komplizierten Bildungsgesetz gelangt, und findet im Verlaufe seiner Untersuchung, dafs Stiefels Verfahren, d. h. das von ihm gelehrte nicht das primäre ist, sondern dafs Stiefel von einer der Formen des magischen Quadrats von 3^2 ausging (s. nebenstehend); dann hieraus das fünfundzwanzigzellige ableitete, indem er jede Ziffer des obigen magischen Quadrats um 8 erhöhte, um die voraus berechnete Mittelzahl 13 zu erhalten; dann setzte er in die leeren Felder Zahlen, zuerst empirisch, die ihm ein neues magisches Quadrat ergaben, und fuhr in dieser Weise fort, bis sich ihm das solchergestalt unschwer zu erkennende Bildungsgesetz offenbarte (Günther). Für die eingehende Darstellung von Stiefels Methode können wir auf Fontès,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Günther und Ahrens verweisen. Wir wollten nur zeigen, dafs auch Arnauld diesen Ausgangspunkt, nämlich das magische Quadrat (s. nebenstehend) mit Stiefel gemein hat.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Dann aber entfernt sich seine Methode von der Stiefels vollständig und gelangt zu anderen Resultaten, wie wir im folgenden zeigen werden. In Arnaulds Darstellung zeigt sich so recht der feine geometrische Geist der Herren von Port royal, sie wäre eines Pascal würdig:

§ 1 giebt die genaue Definition des Problems, § 2 erörtert die Eigenschaften der natürlichen Quadrate. Es giebt in einem ungeraden natürlichen Quadrat eine Mittelzelle, die er Centrum (*centre*) nennt; dann wird festgesetzt, dafs der Umlauf um diese Mittelzelle erster Umlauf, der nächste Zellengürtel um den ersten zweiter Umlauf (*enceinte*), der nächste dritter Umlauf oder Gürtel genannt werden soll und so weiter.

Es wird sodann unzweideutig bestimmt, dafs der erste, dritte, fünfte Gürtel u. s. w. ungerade Gürtel genannt werden sollen (*enceintes impaires*).

Der zweite, vierte, sechste u. s. w. dagegen gerade Umläufe oder Gürtel (*enceintes paires*). Sodann wird genau die Stellung der Ziffern in jedem Gürtel, welche kleiner sind als das Centrum, angemerkt: mit solchen ist nämlich die obere Zeile, ferner die linke Kolonne bis mit der Zelle, welche mit der Mittelzelle in einer Zeile liegt, sowie die rechte Kolonne mit Ausschlufs der mit der Mittelzelle in einer Zeile liegenden (*cellule qui est vis à vis le centre*) erfüllt.

Auf die geraden Quadrate wird die Definition des Centrums (der Ziffer in der Mittelzelle bei den ungeraden) folgerichtig ausgedehnt. Die Bildung des Centrums geschah dort zu $(2n^2 + 2n + 1)$, d. h. es ist die Hälfte der Summe der ersten und der letzten Ziffer des natürlichen Quadrats. Heifst die letztere $(2n + 1)^2$, so ist das Centrum $= \frac{(4n^2 + 4n + 1) + 1}{2}$. Im geraden Quadrat giebt es keine Mittelzelle, also eigentlich auch kein Centrum, aber es soll als solches der analoge Ausdruck $\frac{4n^2 + 1}{2}$ gelten, wenn $4n^2$ die gerade Zellenzahl, d. h. die Ziffer der letzten Zelle ist.

Hier sollen die vier Zellen in der Mitte erster Gürtel, die um diese vier Zellen liegenden nächsten zwölf Zellen zweiter Umlauf oder Gürtel, die um den zweiten Gürtel in Zellenbreite ringsum liegenden Zellen dritter Gürtel heifsen u. s. f.

Die Gürtel 1, 3, 5, 7 u. s. w. sollen wie oben ungerade Gürtel, die Gürtel 2, 4, 6 u. s. w. gerade genannt werden. Hier erfüllen die Zellen, welche kleiner sind als das Centrum, die ganze obere Hälfte des natürlichen Quadrats.

§ 3 bringt eine Vorbereitung der Lösung der Aufgabe.

Arnauld enthüllt hier das Geheimnis seiner Methode; es besteht darin gewisse Zellen, d. h. die sie enthaltenden Ziffern in jedem Gürtel durch Buchstaben zu kennzeichnen, und zwar solle:

In den Quadraten ungerader Zellenzahl, in den geraden sowohl als in den ungeraden Gürteln

die linke obere Eckzelle durch e
die rechte obere Eckzelle durch o
die mittlere Zelle der oberen Zeile durch m
die Zelle vis à vis der Mittelzelle (Centrum) (wir wissen bereits, was Arnauld unter vis à vis dem Centrum versteht) in der linken Kolonne jeden Gürtels durch α

überdies aber in den geraden Gürteln:

Zwei Zellen der oberen Zeile, welche gleichweit abstehen, die eine von e, die andere von o,

durch accentuierte Buchstaben

durch $\grave{e}$
bezw. durch $\grave{o}$

ferner in denselben Gürteln noch weiter die Zelle der linken Kolonne, welche sich direkt unter e befindet durch ω

und die Zelle der rechten Kolonne, welche direkt über der vis à vis dem Centrum gelegenen sich befindet, durch β

bezeichnet werden.

Die Bezeichnung und Hervorhebung gewisser Zellen in den gerade Quadraten ist die folgende:

Im ersten und zweiten Gürtel wird überhaupt nichts bezeichnet.

In allen übrigen Gürteln (ob gerader oder ungerader Index)

die linke obere Eckzelle durch e
die entsprechende rechte durch o
die niedrigsten unter den Zahlen, welche kleiner als das Centrum sind, rechts vom Centrum durch α
dieselben Ziffern links vom Centrum durch β

Aufserdem sind vier Ziffern in der oberen Zeile dieser Quadrate, aber nur in den ungeraden Gürteln (also erstmals im dritten, welcher eine sechszellige Zeile oder Kolonne besitzt)

durch $\acute{e}$
und $\acute{o}$
durch $\hat{e}$
und $\hat{o}$

herauszuheben.

Des weiteren wird die Zelle unter e
durch ω
die rechts über α
durch γ
bezeichnet.

§ 4. Grundsätze bei der Lösung.

1) *Die Summe zweier Ziffern im natürlichen Quadrat, welche auf einer durch das Centrum gehenden Geraden und gleichweit vom Centrum abliegen, ist gleich dem Doppelten des Centrums.*

Das so definierte Supplement einer durch einen Buchstaben charakterisierten Ziffer soll in der Folge immer durch den entsprechenden grofsen bezeichnet werden (*la majuscule de la même lettre*), also

$$e + E = 2c,$$

ebenso

$$\alpha + A = \beta + B = o + O = 2c.$$

2) *Im natürlichen Quadrat stehen vier Ziffern, deren erste ebensoweit entfernt liegt von der zweiten, wie die dritte von der vierten, die aber alle derselben Zeile bezw. Kolonne angehören, in arithmetischer Proportion.*

Also ist die Summe der äufseren der Summe der inneren Glieder gleich.

Z. B. ex definitione $e + o = \grave{e} + \grave{o}$.

(Arnauld schreibt $e \cdot o = \grave{e} \cdot \grave{o}$, versteht aber unsere obige Gleichheit darunter.)

Man kann also überall für $(\grave{e} + \grave{o})$, $(e + o)$, bezw. für $(\grave{E} + \grave{O})$, $(E + O)$ substituieren; speziell ist $e + o = m + m$.

3) *Wenn im natürlichen Quadrat vier Ziffern durch ihre Lage ein Parallelogramm oder speziell ein Rechteck bilden, so stehen die vier Ziffern in arithmetischer Proportion.* (Das heifst die Summen gegenüberliegender Ecken sind gleich.)

§ 5 entwickelt nun das Verfahren, um das natürliche Quadrat in das magisch-magische überzuführen; er enthält die vier allgemeinen Regeln, welche sowohl für gerade wie für ungerade Quadrate gelten.

1) Die Ziffern sind gürtelweise zu übertragen, d. h. die eines Gürtels von geradem bezw. ungeradem Index in einen ähnlichen, d. h. wieder in den entsprechenden geraden bezw. ungeraden.

Vorerst kommt nur die Stellung der kleinen Ziffern eines Gürtels in Betracht, d. h. derjenigen, welche kleiner sind als das Centrum; denn die Stellung einer kleinen Ziffer involviert das Placement ihrer Supplementziffer (oben definiert!) nach den beiden folgenden Regeln:

2) Hat man eine kleine Ziffer in eine Eckzelle postiert, so ist ihr Supplement in die diagonal gegenüberliegende Eckzelle zu stellen.

3) Abgesehen von den Eckzellen, wird jede Supplementziffer in die der zugehörigen kleinen Ziffer entsprechende Zelle der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne gestellt.

Zusatz: Wenn die Ziffern nach dieser Regel angeordnet sind, so läfst sich eine wichtige Folgerung ziehen.

a) Die Summe zweier gegenüberliegender Zeilen bezw. Kolonnen ergiebt soviel mal das Centrum als in beiden Zeilen bezw. Kolonnen Zellen vorhanden sind; denn die Summe einer kleinen Ziffer und ihres Supplements ergiebt $2c$ (zweimal das Centrum) und es sind ebensoviel Supplemente vorhanden wie kleine Ziffern, also z. B.

$$\alpha + A + e + E + \beta + B + \gamma + G + \zeta + Z = 10c$$

b) Hat man den Beweis erbracht, dafs die Summe einer Zeile oder Kolonne, die nach der dritten Regel mit Rücksicht auf die gegenüberliegende besetzt wurde, soviel mal das Centrum ergiebt, als Zellen vorhanden sind, so folgt daraus unmittelbar, dafs diese Summe der Summe in der gegenüberliegenden Zeile resp. Kolonne gleich ist.

Es sei
$$\alpha + E + \beta + G + \zeta + F = 6c$$
so wird, da
$$\underbrace{\alpha + A} + \underbrace{e + E} + \underbrace{\beta + B} + \underbrace{\gamma + G} + \underbrace{\zeta + Z} + \underbrace{f + F} = 12c$$
ist, auch
$$f + e + B + \gamma + Z + A = 6c$$
und also
$$\alpha + E + \beta + G + \zeta + F = f + e + B + \gamma + Z + A.$$

c) Wenn in einer Zeile oder Kolonne sich soviel kleine Ziffern befinden, wie in der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne, und noch die Summe der ersteren (der kleinen Ziffern) gleich ist der Summe der letzteren, so ist dies ein untrügliches Zeichen dafür, dafs die Gesamtsumme in jener Zeile bezw. Kolonne gleich ist der Gesamtsumme in der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne. Denn es besteht dann auch Gleichheit zwischen den beiden Summen der Supplemente.

Ist z. B.
$$\alpha + e + \zeta + \beta = S$$
und
$$\delta + \gamma + \varphi + \mu = S$$
so ist auch
$$A + E + Z + B = \Delta + G + \Phi + M$$
und da
$$\alpha + A + e + E + \zeta + Z + \beta + B = 8c = S + A + E + Z + B$$
und
$$\delta + \Delta + \gamma + G + \varphi + \Phi + \mu + M = 8c = S + \Delta + G + \Phi + M,$$
ist also die Gesamtsumme in beiden Zeilen gleich:

$\alpha + e + \zeta + \beta + \Delta + G + \Phi + M = \mu + E + Z + B + \delta + \gamma + \varphi + A.$

(Die Stellung der Supplemente der Eckzellen ist nach der zweiten Regel Arnaulds bei der Anordnung der Summanden mit berücksichtigt.)

Vierte allgemeine Regel: Zuerst hat man nur die kleinen durch Buchstaben hervorgehobenen Ziffern des natürlichen Quadrats richtig in den Feldern des magischen zu placieren, denn alles andere ergiebt sich durch folgende Überlegungen. Aufser den durch Buchstaben charakterisierten Ziffern bleibt in einer Zeile oder Kolonne irgend eines Gürtels eines sei es geraden, sei es ungeraden Quadrats, entweder gar keine Ziffer übrig oder es bleiben Ziffern verfügbar in einer durch 4 teilbaren Zahl, also 4, 8, 12, 16 u. s. w.

Diese verfügbar bleibenden Ziffern des natürlichen Quadrats in einer Zeile oder Kolonne — betrachten wir speziell die obere Zeile eines Gürtels, welche ex def. nur kleine Ziffern enthält (d. h. solche, welche kleiner sind als das Centrum) — stehen zu vier und vier in arithmetischer Proportion. Wenn man also die äufseren Glieder einer solchen nimmt und sie in eine Zeile stellt, die inneren Glieder der Proportion aber immer in die gegenüberliegende, wobei jedoch stets die Zellen für die Supplemente nach der zweiten Regel verfügbar bleiben müssen für diese Supplemente, so werden diese Paare äufserer und innerer Glieder der Proportion nicht störend auf die schon vorhandene Gleichheit der Summen in den beiden gegenüberliegenden Zeilen einwirken.

Bezüglich der Kolonnen ist es ebenso. Denn die kleinen Ziffern im oberen Teile eines Gürtels des natürlichen Quadrats, welche, nicht charakterisiert, übrig bleiben, stehen in den beiden gegenüberliegenden Kolonnen nach dem dritten Grundsatz, weil sie Rechtecke bilden, zu vier und vier in arithmetischer Proportion. Für die Übertragung in das magische Quadrat hat man also dieselbe Überlegung wie für die Zeilen. Man hat also nur die Übertragung der charakterisierten Ziffern zu kennen und diese wird im folgenden Paragraphen in speziellen Regeln gelehrt.

§ 6. Wir wollen hier nicht die eleganten Beweise Arnaulds, welche auf analysis situs gegründet sind, wiederholen, sondern verweisen auf den französischen Text. Die Versetzungen selbst ergeben sich aus den beiden nachstehenden Figuren (s. S. 323).

Die Beweise Arnaulds wollen wir vielmehr in allgemeine Zeichen übersetzen, indem wir die Ziffern mit Hilfe des Centrums und dem Index, d. h. der Ordnungszahl k des von innen nach aufsen im Einklang mit Arnaulds Definition gezählten Gürtels darstellen und Arnaulds Beweise arithmetisch nachprüfen.

Für Quadrate ungerader Zellenzahl. Fig. 1. Das natürliche Quadrat.

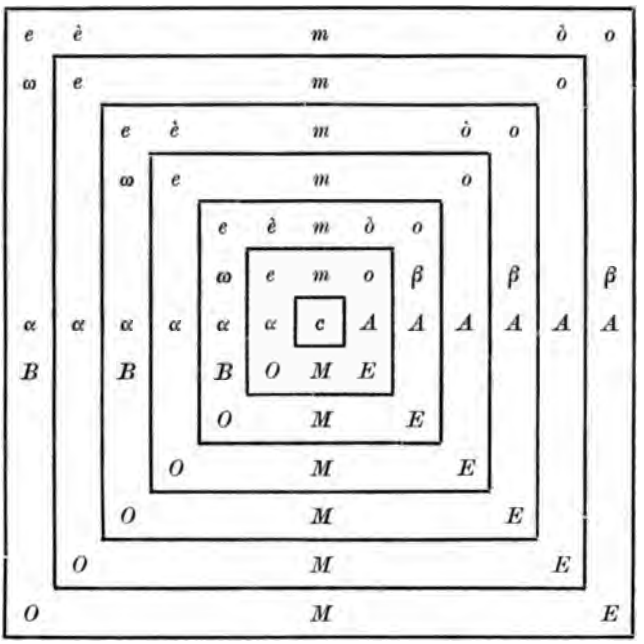
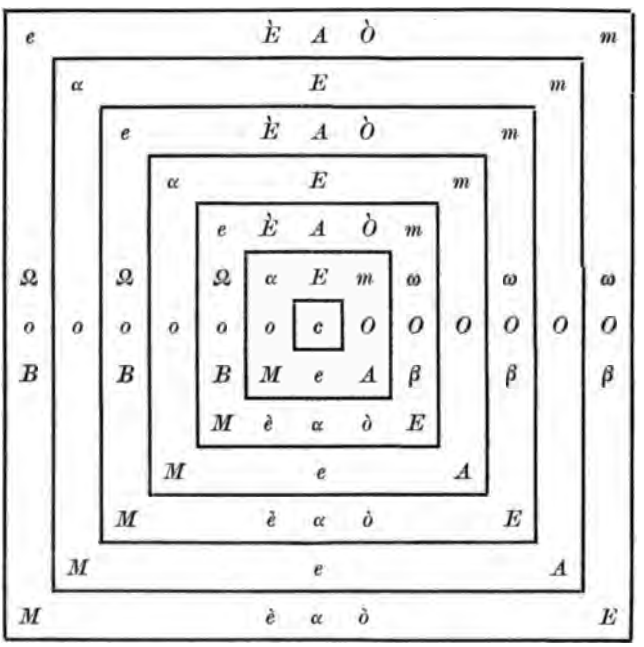


Fig. 2. Das magische Quadrat.



Ist die Grundzahl, d. h. die Wurzel des natürlichen Quadrats von ungerader Zellenzahl $2n + 1$, so ist die Ziffer der Mittelzelle, das Centrum, gegeben durch

$$(2n^2 + 2n + 1).$$

Die durch Arnaulds Buchstaben charakterisierten Ziffern stellen sich wie folgt dar:

I. Für Quadrate ungerader Zellenzahl

$$\overset{\alpha}{A} = (2n^2 + 2n + 1) \overset{-}{+} k$$

$$\overset{e}{E} = (2n^2 + 2n + 1) \overset{-}{+} (k(2n + 1) + k)$$

$$\overset{m}{M} = (2n^2 + 2n + 1) \overset{-}{+} (k(2n + 1))$$

$$\overset{o}{O} = (2n^2 + 2n + 1) \overset{-}{+} (k(2n + 1) - k)$$

$$\omega = e + 2n + 1$$
$$= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) + k) + (2n + 1)$$

$$\beta = A - (2n + 1)$$
$$= (2n^2 + 2n + 1) + (k - (2n + 1))$$

$$\grave{e} = e + 1$$
$$= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) + k) + 1$$

$$\delta = o - 1$$
$$= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) - k) - 1$$

(Wir vereinfachen die Ausdrücke absichtlich nicht weiter, um ihre Bildungsweise hervortreten zu lassen.)

Es müssen nun folgende Beziehungen gelten (wir setzen hier $2n^2 + 2n + 1$ wieder $= c$). Für unsere Zwecke hat k die ganzzahligen Werte 1, 2, 3 ... n zu durchlaufen.

a) in den ungeraden Gürteln

1) $\alpha + o + M = [c - k] + [c - k(2n + 1) + k)] + [c + k(2n + 1)]$

2) $\alpha + E + m = [c - k] + [c + k(2n + 1) + k] + [c - k(2n + 1)]$
$= 3c$

Wir sehen, daſs in beiden Summen alle Glieder mit k sich zerstören; der Ausdruck der Summen ist also unabhängig von k, d. h. er gilt für jedes k.

Da diese Zusammenstellungen aber nur in den ungeraden Gürteln Verwendung finden, so können wir hier k auf die Reihe der ungeraden Zahlen beschränken.

$k = 1, 3, 5, 7 \ldots n$ bez. $n - 1$ je nachdem n ungerade bez. gerade ist.

Setzt man in diesen Formeln $k = 1$ und $n = 1$, so erhält man

$$\alpha = 4; \quad A = 6$$
$$e = 1; \quad E = 9$$
$$m = 2; \quad M = 8$$
$$o = 3; \quad O = 7$$
$$c = 5$$

und wenn man diese Ziffern nach Arnaulds Schablone ordnet, so erhält man jene bestimmte Form des magischen Quadrats von 3^2, von der auch Stiefel ausgegangen war.

b) für die geraden Gürtel.

Hier hat man k die geraden Zahlen $2, 4, 6 \ldots n$ bez. $n - 1$ durchlaufen zu lassen, je nachdem n gerade bez. ungerade ist.

In den geraden Gürteln müssen die Beziehungen gelten:

1) $M + \grave{e} + \alpha + \grave{o} + E =$
$[c + k(2n + 1)] + [c - k(2n + 1) - k + 1]$
$+ [c - k] + [c - k(2n + 1) + k - 1]$
$+ [c + k(2n + 1) + k] = 5c$

2) $E + \beta + O + \omega + m =$
$[c + k(2n + 1) + k] + [c + k - (2n + 1)]$
$+ [c + k(2n + 1) - k] + [c - k(2n + 1) - k + (2n + 1)]$
$+ [c - k(2n + 1)] = 5c.$

Auch diese beiden Summen sind unabhängig von k und besitzen den gemeinsamen Wert $5c$.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal zusammenfassend, wie Arnauld für die ungeraden Quadrate bei der Bildung des magischen Quadrats vorgeht.

Der erste (immer von innen nach aufsen gezählte) Gürtel besitzt im Quadrat ungerader Zellenzahl 3 Zellen; über diese verfügt Arnauld so, dafs die Summe der darin placierten Ziffern gleich $3c$ ist; der nächste, der zweite Gürtel, enthält wieder in einer Zeile bez. Kolonne 5 Zellen; über diese wird so verfügt, dafs die Summe ihrer Ziffern $5c$ ergiebt. Es bleiben also in diesen beiden Gürteln keine weiteren Zellen leer, d. h. verfügbar; der nächste dritte Gürtel enthält in der Zeile bez. Kolonne 7 Zellen, in diesem wird als Gürtel ungeraden Index' über 3 Zellen in der Zeile bez. Kolonne verfügt genau so wie im ersten; es bleiben hier also 4 Zellen leer, verfügbar. Der nächste Gürtel mit 9 Zellen in der Zeile oder Kolonne ist wieder ein gerader, wie der zweite; es wird demnach, wie im zweiten, über 5 bestimmte Zellen so verfügt, dafs deren Summe, d. h. die ihrer Ziffern, $5c$ gleich ist. Es bleiben hier also auch 4 Zellen verfügbar in der Zeile bez. Kolonne. Im nächsten Gürtel von der Zellenzahl 11 pro Zeile bez. Kolonne, der wieder seinem Index nach ein ungerader Gürtel ist (er

ist der fünfte), wird wie im ersten und dritten über 3 Zellen, so verfügt, daſs deren Summe gleich $3c$ ist; es bleiben 8 Zellen verfügbar. Über fünf Zellen einer Zeile oder Kolonne des nächsten, sechsten Gürtels, die aus 13 Zellen besteht, wird, wie im zweiten und vierten Gürtel, die Zahl der in analoger Weise besetzten Zellen wieder 5 sein; es restieren 8 leere Zellen. Allgemein: Die Anzahl der übrig bleibenden Zellen wiederholt sich nacheinander immer einmal und ist eine durch 4 teilbare Zahl. Da die leeren Zellen aber später so besetzt werden, daſs ihre Summe der Summe der entsprechenden bei der Besetzung mit den charakterisierten Ziffern leer gebliebenen Zellen der gegenüberliegenden Zeile bez. Kolonne gleich ist, so muſs, da die dritte allgemeine Regel, welche die Stellung der Supplemente betrifft, eingehalten wurde, die Summe dieser Zellen einer Zeile so vielmal das Centrum ergeben als bei der ersten Besetzung durch die charakterisierten Ziffern Zellen übrig geblieben waren. Die Ziffern dieser letzteren ergänzen also mit ihrer Summe die Summe der charakterisierten Ziffern zu sovielmal c, als überhaupt in der Zeile oder Kolonne Zellen im ganzen vorhanden sind; dann ist aber nach unseren früheren Angaben, nämlich den Folgerungen aus der dritten allgemeinen Regel, eine Zeilen- bez. Kolonnensumme der gegenüberliegenden gleich; sie ist aber auch der diagonalen Summe gleich, da die Eckzellen ja nach der zweiten allgemeinen Regel immer so besetzt werden, daſs die Diagonalsumme des nächsten inneren Quadrats um $2c$ zunimmt; die Diagonalsumme des ersten solchen Quadrats, nämlich des aus 3^2 Zellen bestehenden, ist aber als Summe der Mittelzellenziffer (c) und zweier Supplementziffern $3c$ gleich. Z. B. im sechsten (von innen gezählten) Gürtel, der aus 13 Zellen pro Zeile oder Kolonne besteht, wird zunächst über 5 Zellen verfügt, deren Summe $5c$ gleich ist, die 8 übrig bleibenden Zellen der Zeile bezw. Kolonne werden aber nach dem Gesagten so besetzt, daſs ihre Ziffernsumme $8c$ gleich ist. Die Diagonalsumme ist von c pro Gürtel immer um $2c$ wachsend bis zum sechsten auf $13c$ angewachsen. Es sind also die magischen Eigenschaften des Gürtels erfüllt. Wenn alle Gürtel magisch sind, so ist das aus ihnen bestehende Quadrat magisch-magisch. Solche Quadrate sind also die von Arnauld gebildeten.

§ 7 giebt die Spezialregeln für die Überführung eines natürlichen Quadrats gerader Zellenzahl in das magische.

Man läſst zunächst die beiden ersten (wiederum von innen gezählten) Gürtel ganz beiseite, da diese ihre eigenen Regeln besitzen. Die Versetzungsregeln ergeben sich aus den beiden nebenstehenden Schablonen für alle anderen Gürtel.

Für Quadrate gerader Zellenzahl. Fig. 1. Das natürliche Quadrat.

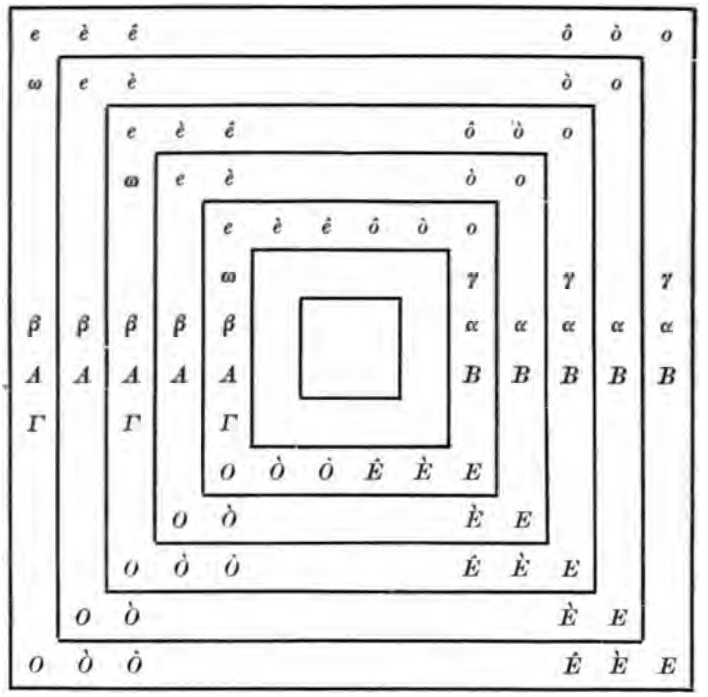
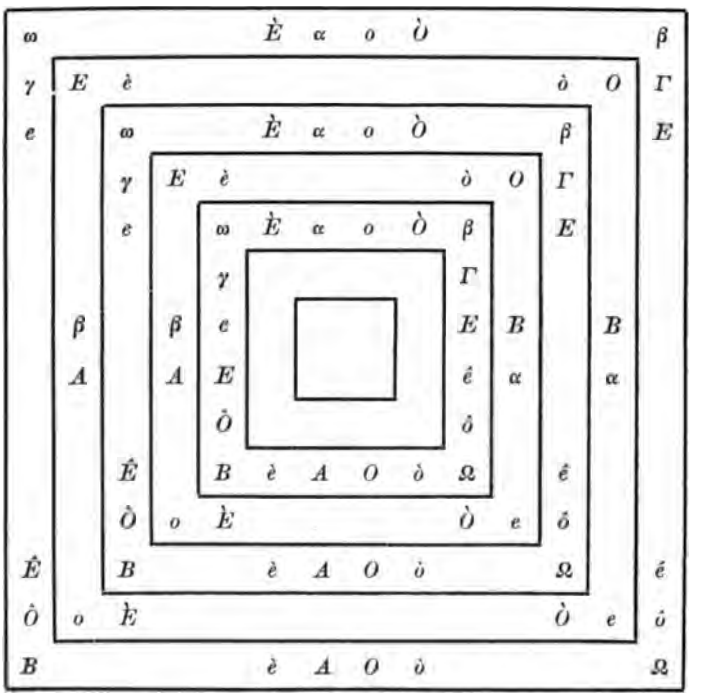


Fig. 2. Das magisch-magische Quadrat.



Wir wollen auch hier wieder die Beziehungen, die in den einzelnen Gürteln gelten müssen, in allgemeine Zeichen übersetzen, indem wir wieder Arnaulds durch Buchstaben charakterisierte Ziffern mit Hilfe des auch für diesen Fall durch eingangs erläuterte Definitionserweiterung vorhandenen Centrums und der Gürtelordnungszahl k darstellen.

Ist $2n$ die Wurzel und zugleich Zellenzahl der Zeile des natürlichen Quadrats, so ist nach Analogie des ungeraden Quadrats

$$4n^2 + 1 = 2c$$

d. h. die Summe der ersten und letzten Zahl des natürlichen Quadrats bildet das (angenommene) doppelte Centrum. Das Centrum im Quadrate von gerader Zellenzahl $2n$ wäre also eigentlich $2n^2 + \frac{1}{2}$; da dieser Ausdruck aber nicht ganzzahlig ist und deshalb zum Ausgangspunkt der Darstellung sich nicht eignet, so nehmen wir für diesen Ausdruck $2n^2 + 1$ (nach Analogie des ungeraden), wobei wir natürlich dieser Veränderung beim Resultat eingedenk bleiben müssen. Es ergiebt sich dann für die durch Arnaulds Buchstaben charakterisierten Zahlen in allgemeiner Form folgende Tabelle:

II. Für gerade Quadrate:

$$\begin{aligned}
\alpha &= [2n^2 + 1] - (n - k) - 1 \\
A &= [2n^2 + 1] + (n - k) \\
e &= [2n^2 + 1] - [k(2n + 1) - n] \\
E &= [2n^2 + 1] + [k(2n + 1) - n] - 1 \\
o &= [2n^2 + 1] - [k(2n - 1) - n] - 1 \\
O &= [2n^2 + 1] + [k(2n - 1) - n] \\
\omega &= e + 2n \\
&= [2n^2 + 1] - [k(2n + 1) - n] + 2n \\
\Omega &= [2n^2 + 1] + [k(2n + 1) - n] - 2n - 1 \\
\beta &= [2n^2 + 1] - (n + k) \\
B &= [2n^2 + 1] + (n + k) - 1 \\
\gamma &= \alpha - 2n \\
&= [2n^2 + 1] - (n - k) - 2n - 1 \\
\Gamma &= [2n^2 + 1] + (n - k) + 2n
\end{aligned}$$

endlich

$$\begin{aligned}
\grave{e} &= e + 1; \quad \grave{o} = o - 1 \\
\acute{e} &= e + 2; \quad \acute{o} = o - 2
\end{aligned}$$

Wir sehen, dafs immer ein Buchstabe, z. B. α, und sein Supplement das Arnauldsche $2c = 2(2n^2 + 1) - 1$ ergiebt. Wir sehen ferner, dafs alle in der rechten Hälfte des natürlichen Quadrats stehenden Buchstaben Arnaulds in unserer Darstellung mit -1 versehen sein müssen.

Es bestehen nun folgende Gleichheiten:

a) Für die ungeraden Gürtel ist:

$$\omega = [2n^2 + 1] - [k(2n + 1) - n] + 2n$$
$$E = [2n^2 + 1] + [k(2n + 1) - n] - 1$$
$$\alpha = [2n^2 + 1] - [n - k] - 1$$
$$o = [2n^2 + 1] - [k(2n - 1) - n] - 1$$
$$O = [2n^2 + 1] + [k(2n - 1) - n]$$
$$\beta = [2n^2 + 1] - [n + k]$$

$$\omega + E + \alpha + o + O + \beta = 12n^2 + 6 - 3.$$

Es zerstören sich oben alle Glieder bis auf

$$12n^2 + 3 = 3(4n^2 + 1) = 3 \cdot 2c$$

also

1) $$\omega + E + \alpha + o + O + \beta = 6c$$

wie Arnauld bewiesen hat (s. den französischen Text) (für jeden Gürtel, da die Summe von k nicht abhängt).

2) wollen wir die Beziehung verificieren

$$\omega + e + \gamma = \beta + \hat{e} + \hat{o}$$
$$\omega + e + \gamma = 3[2n^2 + 1] - 2[k(2n + 1) - n] - (n - k) - 1$$
$$\beta + \hat{e} + \hat{o} = 3[2n^2 + 1] - [k(2n + 1) - n] - (n + k) - [k(2n - 1) - n] - 1$$

oder vereinfacht:

$$\omega + e + \gamma = \beta + \hat{e} + \hat{o} = 3[2n^2 + 1] - 1 - 4kn - k + n$$

Diese Gleichheit bedingt aber die Gleichheit der Supplementensummen $\Omega + E + \Gamma$ und $B + \dot{E} + \dot{O}$ nach der dritten allgemeinen Regel; nach den Folgerungen aus dieser sind dann aber auch die beiden Summen der gegenüberliegenden Kolonnen gleich, nämlich:

$$\omega + e + \gamma + \dot{E} + \dot{O} + B = \beta + E + \Gamma + \hat{e} + \hat{o} + \Omega,$$

wenn diese aber gleich sind, so folgt, da sie nach der dritten Regel angeordnet sind, dafs der ihnen gemeinsame Wert $6c$ beträgt, nämlich soviel mal c als Zellen besetzt sind.

k hat in diesen Summen der Arnauldschen durch Buchstaben charakterisierten Ziffern die Werte 3, 5, 7 ... bis n bez. $n - 1$ zu durchlaufen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

b) Für die geraden Gürtel: hier hätte k die Werte 4, 6, 8 bis $n - 1$ bez. n zu durchlaufen, je nachdem n ungerade bez. gerade ist [doch gilt unsere Darstellung der Ziffern des natürlichen Quadrats selbst noch, wenn $k = 1$ oder $= 2$ ist].

Für $k = 1$ geht $\grave{e}$, wie es sein mufs, in o über und $\grave{o}$ in e. [Für die Übertragung in das magische Quadrat folgen aber die Arnauldschen durch

Buchstaben charakterisierten Zahlen anderen Stellungsregeln als in den übrigen Gürteln, wie im nächsten Paragraph erläutert wird.] Die Summenbeziehungen, die hier gelten müssen, sind für die Zeilen an sich klar, indem $E + \grave{e} + \grave{o} + O$, da ja $\grave{e} + \grave{o} = e + o$ ist, Summe zweier Zahlen und deren Supplemente ist, also

$$E + \grave{e} + \grave{o} + O = 4c,$$

ferner

$$E + \beta + A + o = 4c,$$

denn

$$\begin{aligned} E &= [2n^2 + 1] + [k(2n + 1) - n] - 1 \\ \beta &= [2n^2 + 1] - [n + k] \\ A &= [2n^2 + 1] + [n - k] \\ o &= [2n^2 + 1] - [k(2n - 1) - n] - 1 \end{aligned}$$

jeder einzelne der Summanden ist mit k variabel; aus der Summe aber hebt sich k heraus; dieselbe ist also konstant, d. h. für jeden Gürtel gleich

$$(8n^2 + 4) - 2 = 2(4n^2 + 1) = 4c$$

Wir wollen kurz rekapitulieren:

Das Verfahren zur Herstellung magischer Quadrate gerader Zellenzahl hält genau denselben Gang ein, wie das für solche ungerader Zellenzahl.

Es wird in den Gürteln von ungeradem Index zunächst durch Placement von 6 bestimmten der durch Buchstaben charakterisierten Ziffern in der oben angegebenen Stellung pro Zeile oder Kolonne über 6 Zellen verfügt, ebenso in den Gürteln geraden Index' über 4 Zellen nach den gegebenen Spezialregeln, die aus den Figuren ersichtlich sind. Es bleiben dann zunächst im vierten und fünften Gürtel je 4, im sechsten und siebenten je 8, im neunten und zehnten je 12 Zellen pro Zeile oder Kolonne verfügbar; die Anzahl der zunächst leer bleibenden Zellen ist also immer eine durch vier teilbare Zahl; nun werden die nicht herausgehobenen Zahlen des natürlichen Quadrats, welche kleiner sind als das Centrum, zu Quadrupeln zusammengefafst, so, dafs jedes Quadrupel eine arithmetische Proportion bildet; werden dann die äufseren beiden Zahlen der arithmetischen Proportion in zwei solche Zellen einer Zeile oder Kolonne eingesetzt, welche vorhin verfügbar geblieben waren, und die beiden inneren Glieder der Proportion in zwei noch nicht besetzte Zellen der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne des magischen Quadrats, wobei aber immer die Stellung der Supplemente nach der dritten allgemeinen Regel zu berücksichtigen ist, so folgt aus jener Regel, sowie den im Zusatz daraus gezogenen Folgerungen, dafs die Summe in einer Zeile oder Kolonne gleich ist der Summe in der gegenüberliegenden Zeile oder Kolonne; zugleich sind aber die Kolonnen- und Zeilensumme desselben Gürtels einander gleich, da sie beide sovielmal

c (das Centrum) betragen als Zellen in der Zeile oder Kolonne dieses Gürtels vorhanden sind; dafs auch die Diagonalensumme damit übereinstimmt, ergiebt sich aus der Bildungsweise bezw. Zuwachs pro Gürtel.

§ 8 erklärt die Regeln der Besetzung der beiden innersten Gürtel ($k = 1, 2$) der Quadrate gerader Zellenzahl; dieselben sind genau die der Bildung der magischen Quadrate von 4^2. In diesen giebt es nach Arnauld zwei Arten von Zeilen bezw. Kolonnen, die vier äufseren, und vier, welche das Quadrat durchsetzen, Transversalen: Die zweite und dritte von links nach rechts, und die zweite und dritte Zeile. Dafs dieses Quadrat sich nicht nach den allgemeineren Regeln behandeln läfst, ergiebt sich, wie Arnauld richtig bemerkt, daraus, dafs die vier Zellen in der Mitte vier Streifen bilden, zwei Diagonalen und eine Zeile und Kolonne; es können daher nur die Diagonalen in ihren Summen übereinstimmen (denn, würde auch eine Zeilen- bezw. Kolonnensumme damit übereinstimmen, so käme dieselbe Ziffer zweimal vor, was ex def. ausgeschlossen ist). Die 16 Ziffern von 4^2 lassen sich nach Arnauld auf

$$20922789872000,$$

also auf mehr als zwanzig Millionen millionenmal verschiedene Weise anordnen, wobei aber nur sechzehn magische Formen vorhanden sind; Arnauld schliefst die durch Lagenänderung eines dieser magischen erzeugten von der Zählung aus.

Sodann giebt er eine Tabelle zur Bildung der sechzehn Formen; darin heifst:

1^0): Die vier inneren Zahlen.

2^0): Die Zahlen der vier Eckzellen.

3^0): Die beiden mittleren Zahlen der oberen Zeile und die beiden entsprechenden der unteren Zeile.

4^0): Die beiden mittleren der linken Kolonne sowie dieselben der rechten.

Ferner bedeutet:

o) man solle ein solches Quadrupel (1^0, 2^0, 3^0 oder 4^0) an seinem Platze lassen;

c) man solle es übers Kreuz vertauschen;

g) direkt von rechts nach links vertauschen;

h) direkt von oben nach unten die Vertauschung vornehmen.

Wir glauben Arnaulds instruktive Tabelle hier nochmals folgen lassen zu sollen, da im nächsten Paragraphen darauf Bezug genommen werden mufs.

Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
1.	o	o	o	o	c	c	c	c	g	g	g	g	h	h	h	h
2.	o	c	g	h	o	c	g	h	o	c	g	h	o	c	g	h
3.	c	g	c	g	h	o	h	o	h	o	h	o	c	g	c	g
4.	c	h	h	c	g	o	o	g	c	h	h	c	g	o	o	g

Von diesen sechzehn Formen sind zwei, nämlich die I. und VI., so gebildet, daſs nur acht Zahlen des natürlichen Quadrats ihre Stellung geändert haben, während in XI und XVI alle sechzehn anders placiert wurden. Es folgen die Formen VI und XVI, gebildet mit den Zahlen von 4^2 als Beispiele. Den Beweis führt Arnauld endlich so: Jede Zeile oder Kolonne, gleichviel ob äuſsere oder transversale des Quadrats von vier, oder des Quadrats, welches aus den beiden innersten Gürteln eines Quadrats gerader Zellenzahl besteht, enthält vier Zahlen (im natürlichen Quadrat), welche eine arithmetische Proportion bilden. Es sei die Summe der äuſseren Glieder der oberen Zeile b, die Summe der inneren Glieder, welche ja jener gleich ist, ebenfalls b, sodaſs die Gesamtsumme der Zeile $b + b$ ist, und ebenso in der untersten Zeile $f + f$. Man kann in beiden Zeilen Summengleichheit erzielen, 1) wenn man die äuſseren Glieder der einen tauscht mit den äuſseren Gliedern der anderen, ohne an den inneren Gliedern zu rühren oder

2) indem man die inneren vertauscht und die äuſseren an ihrer Stelle läſst. In beiden Fällen wird die gemeinsame Summe in einem jeden Bande $(f + b)$. Dies hat man nur auf jede der sechzehn Formen der Tabelle anzuwenden, um einzusehen, daſs die vorgenommenen Versetzungen wirklich magische Formen ergaben.

§ 9 ist interessanten Inhalts; er giebt Mittel zur Variation eines nach Arnaulds Methode gebildeten magisch-magischen Quadrats; höchst auffallend ist wieder die Übereinstimmung mit den Worten in der eingangs erwähnten Ankündigung Pascals *„idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso“*.

Wir lassen Arnaulds Worte folgen:

1) *Es wurde vorausgesetzt, daſs man die Zahlen des ersten Gürtels des natürlichen Quadrats in den ersten Gürtel des magischen überträgt, die des zweiten Gürtels in den zweiten, die des dritten Gürtels in den dritten u. s. w.; dies ist aber nicht in dieser Strenge notwendig, sondern für die durch Buchstaben charakterisierten Zahlen genügt die Übertragung in einen ähnlichen Gürtel, d. h. aus einem ungeraden Gürtel in einen beliebigen anderen von*

ebenfalls ungeradem Index, wie z. B. vom fünften in den ersten, und aus einem Gürtel von gerader Ordnungszahl ebenfalls wieder in einen geraden.

2) *Für die nicht durch Buchstaben herausgehobenen Zahlen genügt die Übertragung aus irgend einem Gürtel in einen ganz beliebigen Gürtel* (ob von ähnlichem Index oder nicht), *vorausgesetzt, daſs man sie wieder zu Proportionen* (nach unserer obigen Bezeichnung zu Quadrupeln) *zusammenfaſst und* (in der schon mehrmals erörterten Weise) *die beiden äuſseren Glieder in eine Zeile bezw. Kolonne, die inneren in die gegenüberliegende Zeile bezw. Kolonne immer mit Berücksichtigung der Stellung des Supplements jeder einzelnen nach der dritten allgemeinen Regel einsetzt.*

Arnauld hat diese Variationsweisen bei seinen beiden Beispielen (s. die Tafeln des französischen Textes) in Anwendung gebracht. Etwas überraschend ist, daſs er im Quadrate von zwölf die Zahlen des sechsten Gürtels in den zweiten überträgt; hier muſs dann aber $\dot{e}$ nicht gleich $e + 1$ gewählt werden, sondern $e + x$ wird gleich $\dot{o} = o - x$; denn ursprünglich sollen ja auch $\dot{e}$ und $\dot{o}$ nur zwei von e bezw. o gleichweit abstehende Zahlen sein (im übrigen setzt Arnauld immer $x = 1$; der einfachste Fall); hier aber in den Quadraten gerader Zellenzahl bei Übertragung aus einem geraden Gürtel in den zweiten muſs das x immer der Bedingung genügen:

$$(o - x) - (e + x) = 1 \text{ oder } x = \frac{(o - e) - 1}{2}$$

also

$$\dot{e} = e + \frac{o - e - 1}{2} \text{ und } \dot{o} = o - \frac{o - e - 1}{2}$$

In der genannten Tafel hat Arnauld zur Bildung der beiden innersten Gürtel die Form VI seiner oben reproduzierten Tabelle benützt. Auſserdem ist bei der Betrachtung der Tafel noch auf einige Abweichungen von den im Text gegebenen Regeln aufmerksam zu machen, welche unwesentlich sind, aber den Anschein erwecken könnten, als ob Arnauld seine Regeln nicht eingehalten hätte. Wir haben diese Abweichungen in unseren beiden Orientierungstäfelchen beibehalten. Nämlich bei der Bildung der geraden Gürtel sind die Eckzahlen übers Kreuz vertauscht; sodann ist α mit β vertauscht gegen die im französischen Text gegebenen Anordnungen. In Arnaulds Tafel des Quadrats von zwölf steht (beibehalten in unseren beigefügten Täfelchen) γ über e in den ungeraden Gürteln, während in der Vorschrift des Textes γ unter e steht; doch diese Abweichungen sind nur unwesentlich und gehören wohl zu den Variationsmitteln, von denen Arnauld sagt, daſs er sie wegen ihrer Leichtigkeit und Unwichtigkeit nicht besonders aufzählen wolle.

Zum Schluſs giebt Arnauld eine Aufzählung der Vorzüge seiner Methode; wir können nur beipflichtend als beste Würdigung dieselben hier wiederholen:

Arnaulds Methode zur Bildung magisch-magischer Quadrate ist die leichteste, kürzeste und vollendetste, denn

1) Man hat die Zahlen nur zweimal anzuschreiben (oder nach den von uns für das natürliche Quadrat gegebenen Formeln mit Hilfe vom Centrum und dem Index des Gürtels zu berechnen).

2) Es giebt nirgends Tâtonnement (Probieren), sondern man ist sich immer dessen bewufst, was man macht.

3) Die gröfsten Quadrate sind nicht schwieriger zu bilden als die kleinsten.

4) Man kann die magischen Quadrate beliebig variieren.

5) Man nimmt nur streng bewiesene Operationen vor.

6) Die Methode ist so allgemein, dafs man ohne jede Änderung mit ihr auch das schwierigere Problem lösen kann:

Hat man die Zahlen einer beliebigen geometrischen Proportion wie 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w. in einem natürlichen Quadrat angeschrieben, sie so in ein Quadrat gleicher Zellenzahl zu übertragen, dafs das Produkt aller Zahlen einer Zeile gleich wird dem Produkt jeder anderen Zeile, Kolonne oder Diagonale, d. h. mit anderen Worten: ein magisches Quadrat multiplikativer Eigenschaft zu bilden, wie z. B.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Schlufs.

Wir haben Arnaulds mathematische Arbeiten, seine Thesen, seine Logik, die *Nouveaux Elemens de Géométrie* inhaltlich genau kennen gelernt. Wir haben seine Bedeutung für die Philosophie der Mathematik, seine zahlentheoretischen Arbeiten ausführlich entwickelt; wir haben erfahren, welch klare Vorstellungen Arnauld über den Begriff der Grenze und die *„Geometrie der Indivisibilien"* sich gebildet hatte; wie er die Berechnung des Kreisinhaltes durch ein Verfahren bewies, welches mit dem heute bei Integrationen, z. B. in der Potentialtheorie angewendeten, der Zerlegung in Elemente grofse Ähnlichkeit besitzt. Aber der Schwerpunkt seines Schaffens liegt in seiner Reformation der Elementargeometrie. Viele seiner Sätze, seiner originalen Beweise sind dem heutigen Leser besser bekannt als die entsprechen Euklids. Gerade das ist „das sicherste Zeichen der enormen Gröfse des Mannes, dafs viele seiner Gedankengänge heutzutage trivial erscheinen". Die grofsen antiken Geometer sind im XVII. Jahrhundert in einer vervollkommneten Individualität wieder auferstanden: Galileis Me-

daille trägt auf dem Revers als einzige Bezeichnung das Wort „Archimedes", Fermat hat man wohl einen zweiten Diophant genannt, Desargues und Pascal haben des Apollonius' Spezialität, die Kegelschnitte, in neuer, überraschender Weise in Angriff genommen. Die Bedeutung des grofsen Arnauld, dem Descartes, Pascal und Leibniz ihre Freundschaft und Bewunderung schenkten, für die Mathematik können wir entsprechend als Resultat unserer Arbeit in dem Satze zusammenfassen: Arnauld ist der Euklid des XVII. Jahrhunderts.

Litteraturangabe.

Aufser den schon früher angegebenen biographischen Schriften für Arnaulds Leben, sowie Bd. I, II, III, IV, ferner XXXVIII—XLII inclus. der *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld,* Paris 1774—1781 fol. und den editiones principes rarissimae: *„Nouveaux Elemens de Géométrie,* Paris 1667 in 4° und *La Logique ou l'art de penser,* Paris 1662 in 12° (im Besitze des Verfassers vorliegender Arbeit) haben wir folgende Werke benutzt:

Ahrens, Dr. W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig 1901.

Barthelmy, Les Amis de la marquise de Sablé. Paris 1865.

Bertrand, Blaise Pascal. Paris 1891.

(*Besoigne*) *Histoire de l'abbage de Port-Royal,* Tom. VI. A Cologne MDCCLII.

Beughem, La France sçavante, i. e. Gallia erudita critica et experiment. noviss. Amsterdam (Wolfgang) 1683 in 12° (Generalregister der Jahrgänge 1665—1687 des Journal des Sçavans).

Bossut, Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques. A Paris MDCCCII.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I. 2. Aufl. 1894. Bd. II und Bd. III. 2. Aufl. 1900 und 1901.

Cantor, Moritz, Blaise Pascal. Preufsische Jahrbücher XXXII S. 212—237.

Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. A Paris II. edit. 1875.

Comptes rendus hebdomaires des séances de l'Academie des sciences. Tom. 73. 1871.

Cousin, Etudes sur Pascal. Paris 1857.

Cousin, Madame de Sablé. Paris 1859.

Descartes, Les lettres. 3 vols. Paris 1667.

Fischer, Kuno, Geschichte der neueren Philosophie. (Jubiläumsausgabe.) Bd. I. Descartes' Leben, Werke und Lehre. Bd. II. Spinozas Leben, Werke und Lehre. Bd. III. Gottfried Wilhelm Leibniz.

Gerhardt, C. J., Leibnizens (Gesammelte Werke) mathematische Schriften. 7 Bde. (8 Teile) und Supplem. Berlin und Halle 1849—1863.

Gerhardt, C. J., Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern. Berlin 1899. Bd. I.

Gerhardt, C. J., Sitzungsberichte der Berliner Akademie. Berlin 1892 (S. 183—204) „Desargues und Pascal über die Kegelschnitte". Ebenda 1891 „Leibniz und Pascal" S. 1053—1068.

Grotefend, Briefwechsel zwischen Leibniz, Arnauld und dem Landgrafen Ernst von Hessen-Rheinfels. Hannover 1846.

Guhrauer, G. E., Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz. (Jubelausgabe.) Breslau 1846.

Günther, S., Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876.

Heis, Dr. E., Lehrbuch der Geometrie. I. *Planimetrie.* Köln 1881.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publ. p. l. societé holland. des sciences. 4°. La Haye 1888.

Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences année MDCCXXVII. à Paris MDCCXXIX.

Journal des Sçavans, Le, .. Par le Sr. G. P. à Paris, chez Jean Cvsson ... MDCLXVII. (pag. 195—196).

Lamy, B., Les Elemens de Géométrie et de la mesure de l'étendue. 7. ed. 12°. Paris 1758.

Malézieu, Nicolas de, Elémens de Géométrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne. 2 ed. Paris 1722.

Maury, A, L'ancienne Academie des Sciences. Paris 1864.

Matanasiana ou Mémoires littéraires, historiques et critiques du docteur Matanasius, à la Haye 1740 in 12°.

Montucla, M., Histoire des Mathématiques à Paris MDCCLVIII.

Nourrisson, Pascal physicien et philosophe. Paris 1888.

Pascal Blaise, Oeuvres complètes. Paris (Hachette) 1880.

Philosophical-Transactions in der lateinischen Ausgabe *Acta philosophica societatis regiae in Anglia anni MDCLXV, VI, VII, VIII, und MDCLXIX Auctore Henrico Oldenburgico ..... in Latinum versa interprete C. S.* Lipsiae anno MDCLXXV.

Poggendorff, Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Bd. I und II. 1863.

Reiff, Dr. R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.

Stäckel, Paul, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauſs. Leipzig 1895.

Schotten, Dr. *H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts.* Bd. I und II. Leipzig 1890 und 1893.

Varignon, Pierre, Elemens de Mathematiques. Paris 1731 in 4°.

Veronese, Grundzüge der Geometrie. Leipzig 1894.

Windelband, W., Die Geschichte der neueren Philosophie. 2 Bde. Leipzig 1899.

Druckfehlerverzeichnis.

S. 197 Z. 1 von oben füge nach *Cartesianae* hinzu: erschien,
S. 208 Z. 6 von oben lies *infiniment* statt *infinement* (zweimal).
S. 209 Z. 5 von unten lies *ont* statt *on*.
S. 215 Z. 7 von oben lies *n'avoit* statt *n'avait*. — Z. 12 von oben lies *ne* statt *nec*.
S. 233 Z. 6 von unten lies *particulieres* statt *particuliers*.
S. 238 Z. 4 von unten lies *demonstrandi* statt *domonstrandi*.
S. 241 Z. 2 von oben lies *jours* statt *jour*.
S. 243 Z. 5 von oben lies *suppléer* statt *supléer*.
S. 247 Z. 14 von unten lies *quand* statt *quant*.
S. 248 Z. 1 von oben lies *Analyse* statt *Analise*. — Z. 2 von oben und Z. 4 von oben lies *s'égarer* statt *égarer*
S. 283 Z. 10 von oben lies Dann statt Denn.
S. 284 Z. 11 von oben lies antiparallelen statt parallelen.
S. 285 Z. 20 von oben ist das Semikolon vor = zu streichen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 972 385

MATH COMP. SCI. LIB.

QA
21
P
1902

DATE DUE

GAYLORD			PRINTED IN U.S.A.

OCT 04 1994
OCT 13 1994
1995
DEC 21 1995

118820